

Solución Desafío “El cable colgante”

Jorge Avalos E.

Cinemática

Para describir el movimiento de la parte del cable que cae debido a la gravedad, tomamos como referencia la punta del cable:

$$a = -g$$

$$v(t) = \int a \cdot dt = v_0 - gt = -gt$$

$$y(t) = \int v \cdot dt = y_0 - \frac{gt^2}{2} = 2L - \frac{gt^2}{2}$$

De aquí en adelante los superíndices 1 y 2 denotarán la fracción de cable que está cayendo y la fracción de cable que ya ha caído, respectivamente.

La masa de cable que va cayendo, i.e. con velocidad, es variable en el tiempo:

$$m^1(t) = d \cdot l^1(t) = \frac{M}{L} \cdot \left(L - \frac{gt^2}{2}\right) = M \left(1 - \frac{gt^2}{2L}\right)$$

Por lo tanto, el momentum queda dado por:

$$p(t) = m^1(t) \cdot v(t) = -Mgt + \frac{Mg^2}{2L} t^3$$

Dinámica

En un instante t , la fuerza neta que actúa sobre la fracción de cable que cae, se compone de la fuerza debida a la gravedad, F_G^1 , que la hace caer, y la fuerza que hace el soporte para frenarla, F_{sop}^1 . Esta fuerza neta es equivalente a la derivada del momentum de la masa de cable que cae:

$$F = \frac{dp}{dt}$$

$$F_{sop}^1 - F_G^1 = \frac{d}{dt} \left(-Mgt + \frac{Mg^2}{2L} t^3 \right)$$

$$F_{sop}^1 - m^1(t) \cdot g = -Mg + \frac{3Mg^2}{2L} t^2$$

$$F_{sop}^1 - M \left(1 - \frac{gt^2}{2L} \right) g = -Mg + \frac{3Mg^2}{2L} t^2 \rightarrow F_{sop} = \frac{2Mg^2}{L} t^2$$

Estática

Finalmente, la fuerza total que debe hacer el soporte es la suma del peso de la fracción de cable caído más la fuerza debida a la disminución de momentum de la fracción de cable que está cayendo a cada instante:

$$F_{sop} = F_{sop}^1 + F_{sop}^2$$

$$F_{sop} = \frac{3Mg^2}{2L} t^2 + m^2(t) \cdot g = \frac{2Mg^2}{L} t^2 + \frac{Mg}{2L} t^2 \cdot g$$

$$F_{sop} = \frac{5Mg^2}{4L} t^2$$

El instante en que la fuerza sobre el soporte iguala a la fuerza máxima resistida por este es:

$$Mg = \frac{5Mg^2}{4L} t^2 \rightarrow t_0 = 2\sqrt{\frac{L}{5g}}$$

Y por lo tanto, la longitud de cable que está cayendo en ese instante es:

$$l^1(t_0) = L - \frac{g}{2} \cdot 4 \frac{L}{5g} = L - \frac{2L}{5}$$

$$l_0^1 = \frac{3}{5} L$$

Y la longitud del cable caído:

$$l^2(t_0) = L - l^1(t) = L - \frac{3}{5} L$$

$$l_0^2 = \frac{2}{5} L$$

