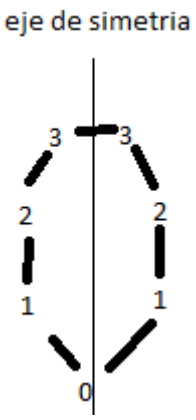
Vamos a empezar por lo difícil. Por un problema con N salas. Hasta ahora hemos nombrado las salas por una letra mayúscula siguiendo el orden alfabético. Pero si el número de salas puede ser cualquiera creo que es mejor cambiar la notación y pasarlas a nombrar por un número natural n, que designa la distancia de esta sala a la sala de salida. De esta forma la sala de salida seria la sala 0, las dos conectadas con ella las salas 1. Estas dos salas son indistinguibles entre si, en cuanto a probabilidad se refiere, por lo tanto las consideraremos iguales. A partir de ahí nombramos sucesivamente. Dada la simetría del problema únicamente consideraremos las salas a un lado del problema, puesto que las del otro son iguales a estas. En concreto elegiremos el lado izquierdo.



¿Cuál será la probabilidad de morir en la sala n?

Empecemos calculando todos los posibles caminos que podemos seguir para llegar a la sala n. Para ello vamos a seguir los pasos desde la sala 0. Cada paso en el sentido de las agujas del reloj se considera como sumar una unidad (+1) al número de sala y cada paso en el sentido contrario es como restar una unidad (-1) al número de sala. De esta manera un posible camino para llegar a la sala 2 seria:

+1-1-1+1+1+1+1-1

En realidad llegamos a la sala 2 mediante cualquier combinación de +1 y -1 que sumada nos de 2. Pero no solo podemos llegar de esta manera, también nos sirve cualquier combinación que nos de 2+7=9 o 2+3·7=23 o 2-7=-5 (para el ejemplo del gráfico), o en general de n+kN, siendo k cualquier número entero.

En el primer ejemplo (+1-1-1+1+1+1+1-1), en el que damos 8 pasos, la probabilidad de llegar es de $\frac{1}{4^8}$ (ya que en cada paso has tienes una probabilidad de sobrevivir de ½ y una probabilidad de pasar a la habitación de ½ , con lo que la probabilidad total por paso es de ¼ , dado que en el último paso mueres en el también tienes una probabilidad de ¼). Sin embargo hay bastantes combinaciones con la misma suma final de 2 y 8 pasos, que obtendremos de todas las posibles combinaciones de ordenar tres -1 y cinco +1, que serán $\binom{8}{3}$.

Veamos cómo se obtiene, por ejemplo, la suma total de la probabilidad de llegar con una suma total de 2. Podemos llegar con +1+1, que sería en dos pasos (probabilidad $\frac{1}{4^2}$, combinaciones 1), pero si sumamos +1 y -1 también llegamos con una suma total de 2, en cuatro pasos (probabilidad $\frac{1}{4^4}$, combinaciones $\binom{4}{1}$), o sumar dos veces +1 y -1, por lo tanto en seis pasos (probabilidad $\frac{1}{4^6}$, combinaciones $\binom{6}{2}$). Podemos llamar l al número de veces que añadimos +1 y -1 a la suma total que queremos obtener llegando a la probabilidad total, suma de todas las posibilidades posibles:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{4^{2+2l}} \binom{2+2l}{l}$$

Donde $\frac{1}{4^{2+2l}}$ es la probabilidad de llegar, ya que se dan $2+2l$ pasos, y $\binom{2+2l}{l}$ es el número de posibles caminos con suma 2 y $2+2l$ pasos.

El razonamiento es el mismo para cualquier suma total que nos lleve a la sala n, como vimos antes n+kN, con lo que **la probabilidad de morir para la sala n de un total de N salas seria**:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{4^{|n+kN|+2l}}\binom{|n+kN|+2l}{l}$$

El único problema es el caso n=0, en el que tendremos que restar 1, puesto que n=0, l=0, y k=0 dan una probabilidad de 1, cuando la probabilidad correspondiente es 0, es un caso que no puede existir, ya que estás obligado a salir de la sala de salida.

No he encontrado una manera de sumar esto de manera elegante, para obtener algo que de un poco de color al asunto, pero sumando con el Mathematica obtengo los resultados correctos para 4 salas y para 5 salas.

Seguiré intentándolo, si obtengo algo te lo enviaré.