SOLUCIÓN AL SEGUNDO APARTADO

v_n es la velocidad de M tras el choque enésimo y v'_n es la velocidad de m tras el choque enésimo.

Justo antes del choque enésimo entre el bloque de masa M y el bloque de masa m tenemos que:

La velocidad (relativa) con la que se acerca el bloque de masa m al bloque de masa M es:

$$u_{n-1} = v_{n-1} + v'_{n-1}$$

Dado que M>>m podemos usar el planteamiento de que es como si el bloque de masa m chocara elásticamente contra una pared, es decir, la velocidad relativa con la que se alejará el bloque de masa m será igual a la velocidad relativa con la que se acercaba. Esta idea la tuvo Argus en un desafío anterior y en ese caso funcionaba, supongo que seguirá funcionando :). Si no, habría que plantear la conservación de la energía y del momento lineal y luego ir despreciando términos. Nos quedaría un poco más complicado aunque, obteniendo el mismo resultado (supongo).

En definitiva:

$$u_n = v_{n-1} + v'_{n-1}$$

Por tanto, la velocidad del bloque de masa m tras el choque enésimo será:

$$v'_n = v_{n-1} + v'_{n-1} + v_n \quad (ec. 1)$$

Aplicando la conservación del momento lineal:

$$Mv_{n-1} - mv'_{n-1} = Mv_n + mv'_n \quad (ec. 2)$$

Usando las ecuaciones 1 y 2 obtenemos que:

$$v_n = \frac{(M-m)v_{n-1} - 2mv'_{n-1}}{M+m}$$

$$v'_n = \frac{(M-m)v'_{n-1} + 2Mv_{n-1}}{M+m}$$

O, en forma matricial

$$\begin{pmatrix} v_n \\ v'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{M-m}{M+m} & \frac{-2m}{M+m} \\ \frac{2M}{M+m} & \frac{M-m}{M+m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{n-1} \\ v'_{n-1} \end{pmatrix}$$

O, lo que es lo mismo:

$$\begin{pmatrix} v_n \\ v'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{M-m}{M+m} & \dfrac{-2m}{M+m} \\ \dfrac{2M}{M+m} & \dfrac{M-m}{M+m} \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} v_0 \\ v'_0 \end{pmatrix} \quad (ec. 3)$$

Los autovalores de esta matriz son:

$$\sigma_1 = \frac{M-m+i\sqrt{4mM}}{M+m}$$

$$\sigma_2 = \frac{M-m-i\sqrt{4mM}}{M+m}$$

Es fácil demostrar con unos pocos conocimientos de matrices que, en este caso la velocidad viene dada por:

$$v_n = (a\sigma_1^n + b\sigma_2^n)v_0$$

Con a y b constantes. Para n=1, igualando esta última expresión con la que obtenemos de la ecuación 3 tenemos que:

$$v_1 = \frac{M-m}{M+m}v_0 = (a\sigma_1 + b\sigma_2)v_0$$

De donde igualando la parte real y la imaginaria obtenemos que a=b=1/2

Así, obtenemos que la velocidad del bloque de masa M tras el enésimo choque es:

$$v_n = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{M-m+i\sqrt{4mM}}{M+m}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{M-m-i\sqrt{4mM}}{M+m}\right)^n\right]v_0$$

Notar que al ser un término el conjugado del otro el número resultante es real.

Igualando v_n a 0 obtenemos que:

$$\left(M-m+i\sqrt{4mM}\right)^n + \left(M-m-i\sqrt{4mM}\right)^n = 0 \quad (ec. 4)$$

Ambos términos son conjugados. Tienen el mismo módulo y argumentos opuestos. Dichos argumentos son:

$$\alpha_1 = n * arctan\left(\frac{\sqrt{4mM}}{M-m}\right)$$

$$\alpha_2 = -n * arctan\left(\frac{\sqrt{4mM}}{M-m}\right)$$

Si representamos ambos términos en el plano, es fácil ver que para que v_n sea 0, $\alpha_1$tiene que valer 90º (la parte real de ambos términos será 0 y su parte imaginaria será una la opuesta de la otra). Es decir, si representamos ambos términos en el plano complejo, el primer término ira vertical hacia arriba y el segundo término vertical para abajo. Su suma será 0.

Es decir:

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\boldsymbol{n = \frac{\pi/2}{arctan\left(\frac{\sqrt{4mM}}{M-m}\right)}}$$

Así, el número de choques será n, si este es entero. Si n no es entero, el choque en el que se parará el bloque M será el siguiente entero a partir de n. Es decir, si por ejemplo n=2,5 el bloque se parará en el tercer choque.(no sólo se parará, sino que cogerá velocidad hacia la izquierda).

Ahora vamos a calcular v'_n en función de v_0

Tenemos que:

$$v'_n = (a'\sigma_1^n + b'\sigma_2^n)v_0$$

Aplicando esta ecuación para n=1 y para n=0 obtenemos que:

$$a' + b' = 0$$

$$a'\sigma_1 + b'\sigma_2 = 2\frac{M}{M+m}$$

Resolviendo este sistema obtenemos que:

$$a' = \frac{-M}{\sqrt{4mM}}i$$

$$b' = \frac{+M}{\sqrt{4mM}}i$$

Luego nos queda que v'_n es:

$$v'_n = \frac{-M}{\sqrt{4mM}} i \left(\left(\frac{M-m+i\sqrt{4mM}}{M+m}\right)^n - \left(\frac{M-m-i\sqrt{4mM}}{M+m}\right)^n\right) v_0$$

También es fácil comprobar en esta expresión que el valor de la velocidad es real.

SOLUCIÓN AL PRIMER APARTADO

Sea d_i la distancia de la pared al punto donde se chocan M y m en el momento justo del choque i+1. Tenemos que:

$$d_0 = D$$

$$d_{i-1} + d_i = v'_i t_i$$

$$d_{i-1} - d_i = v_i t_i$$

Eliminando t_i de ambas ecuaciones obtenemos que;

$$d_i(v_i + v'_i) = d_{i-1}(v'_i - v_i)$$

Usando ahora la ecuación 1 obtenemos que:

$$d_i(v_i + v'_i) = d_{i-1}(v_{i-1} + v'_{i-1})$$

Es decir:

$$\boldsymbol{d_i(v_i + v'_i) = CTE = Dv_0}$$

Luego la distancia a la pared en el choque n será:

$$d_{n'} = D\frac{v_0}{v_{n'} + v'_{n'}}$$

$$n' = n - 1$$

Por tanto, tenemos que la distancia a la pared a la que se detiene el bloque de masa M es:

$$\boldsymbol{d_{n'} = \frac{D}{\frac{-M}{\sqrt{4mM}} i \left(\left(\frac{M-m+i\sqrt{4mM}}{M+m}\right)^{n'} - \left(\frac{M-m-i\sqrt{4mM}}{M+m}\right)^{n'}\right)} + \frac{D}{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{M-m+i\sqrt{4mM}}{M+m}\right)^{n'} + \frac{1}{2}\left(\frac{M-m-i\sqrt{4mM}}{M+m}\right)^{n'}\right]}}$$

Donde n’ viene dada por:

$$n' = ENT\left(\frac{\boldsymbol{\pi/2}}{\boldsymbol{arctan}\left(\frac{\boldsymbol{\sqrt{4mM}}}{\boldsymbol{M-m}}\right)}\right)$$

(ENT (x) es la parte entera de x).