Desafío – Fernando y el cangrejito.

Suposiciones y aproximaciones.

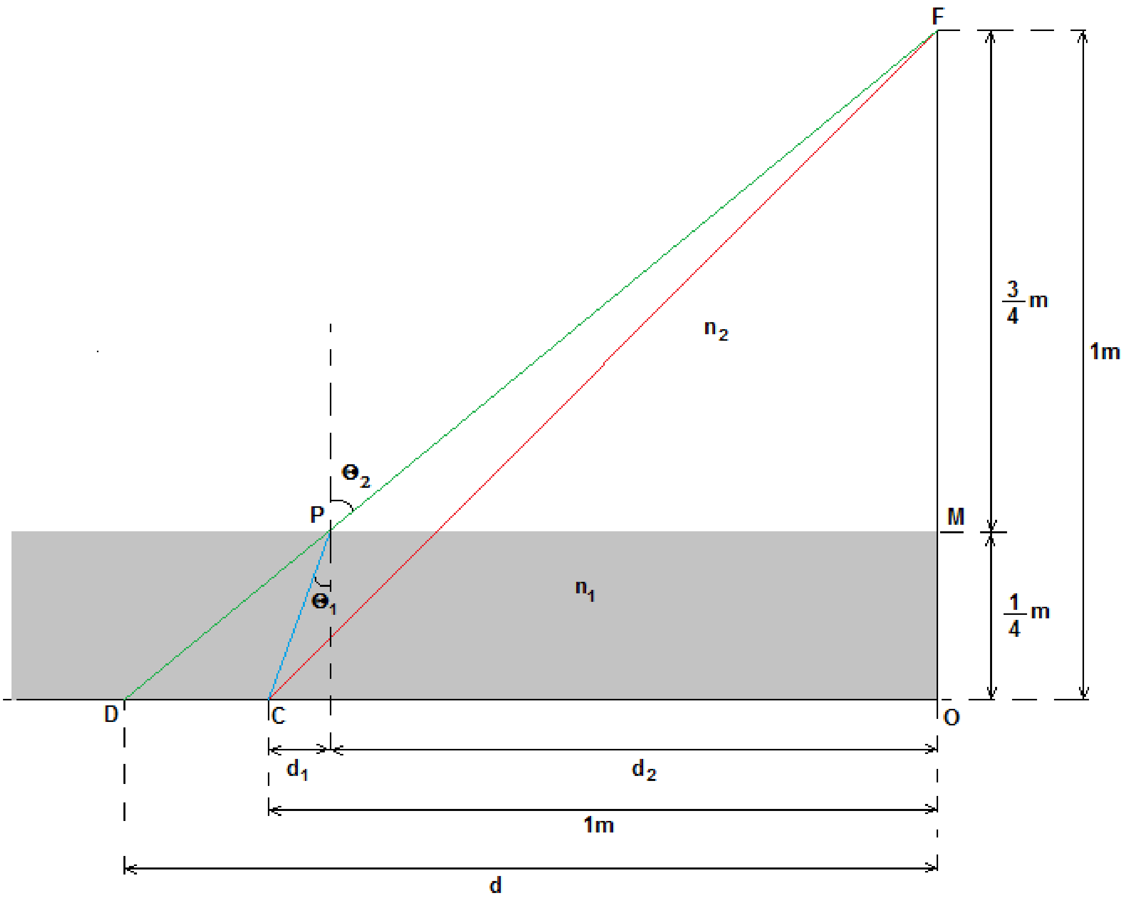
Para mayor comodidad en la resolución del problema supondremos que:

- **Fernando tiene los ojos exactamente a un metro de altura**, dado que se nos informa de la altura de este pero no de la distancia de sus ojos a su punto mas alto. No tiene mayor importancia ya que es indiferente (salvo para el resultado numérico) la altura que escojamos.
- **El cangrejito y los pies de Fernando se encuentran a la misma altura**, dado que si se encontraran a altura diferente bastaría con resolver el problema de la misma manera modificando la altura de Fernando de forma que coincidiera con la diferencia de altura entre sus ojos y el cangrejito.
- **Los ojos, los pies y las rodillas de Fernando se encuentran en la misma recta.**
- **La superficie del agua es completamente lisa.** Ya que de no ser así, considerar el efecto de las olas en movimiento nos daría presumiblemente (tras un muy arduo trabajo) una posición media idéntica a la calculada según esta aproximación.
- **Los índices de refracción son constantes para cada material de valor:**
    - n_1= 1,339 para el agua de mar (no estoy muy seguro de este valor, pero es el que aparecía, en varios artículos que he encontrado por google, como un valor típico, aunque el valor real dependa de la salinidad, la temperatura y la presión).
    - n_2= 1 para el aire.

Obtención de la distancia de los pies de Fernando al cangrejo.

Consideraremos que la luz que viene del cangrejo para llegar al ojo de Fernando se refracta según la ley de Snell. De esta forma el valor del ángulo que forma la trayectoria con la normal será mas alto para la trayectoria en el agua que para la del aire, y por tanto Fernando percibe al cangrejo con un ángulo mayor respecto de la vertical. Esto querría decir, suponiendo que Fernando sigue percibiendo al cangrejo en el suelo, que la distancia aparente del cangrejo a sus pies debería aumentar. Sin embargo, las trayectorias aparentes de la luz que viene del cangrejo no convergen en el suelo, como veremos.

Según las aproximaciones realizadas tendremos una situación similar a la representada en la siguiente figura:



Donde el punto O representa el punto en el que se encuentran los pies de Fernando, el punto F donde se encuentran sus ojos, el punto C donde se encuentra el cangrejito, el punto P en el que la trayectoria real de la luz que sale del cangrejo para llegar al ojo de Fernando pasa por la interfase aire-agua, el punto D el punto en el que la trayectoria aparente (para Fernando) de la luz que viene del cangrejo se cruza con el nivel del suelo y el punto M el punto donde se encuentran las rodillas de Fernando.

Consideraremos que la luz que viene del cangrejo para llegar al ojo de Fernando se refracta según la ley de Snell. De esta forma el valor del ángulo que forma la trayectoria con la

normal será mas bajo para la trayectoria en el agua Θ_1 que para la del aire Θ_2, y por tanto Fernando percibe al cangrejo con un ángulo mayor respecto de la vertical (e igual a Θ_2).

Esto querría decir, suponiendo que Fernando sigue percibiendo al cangrejo en el suelo, que Fernando percibe al cangrejo en el punto D, más alejado de sus pies que el cangrejo.

Sin embargo, las trayectorias aparentes de la luz que viene del cangrejo no convergen en el suelo, como veremos, sino en un punto más cercano. Esto es debido a que dos trayectorias que salen del cangrejo en el agua con un ángulo determinado, están separadas un ángulo mayor en el aire, como consecuencia de la ley de Snell, y por tanto convergen en un punto más cercano.

Para resolver el problema comenzaremos hallando la distancia d del punto D al punto O. Esta distancia cumplirá que:

$$sin\theta_2 = \frac{d}{\overline{DF}}$$

Pero $\overline{DF} = \sqrt{1+d^2}$ por el teorema de Pitágoras. Y por tanto:

$$sin\theta_2 = \frac{d}{\sqrt{1+d^2}}$$

Siendo por la ley de Snell que:

$$sin\theta_1 = \frac{n_2}{n_1} sin\theta_2 = \frac{n_2}{n_1}\frac{d}{\sqrt{1+d^2}} \qquad (1)$$

Pero podemos calcular el $sin\theta_1$ por otro camino, ya que por el teorema de Tales:

$$\frac{d}{1} = \frac{d_2}{3/4} \quad \Rightarrow \quad d_2 = \frac{3d}{4} \quad \Rightarrow \quad d_1 = 1 - \frac{3d}{4}$$

Y sabemos que:

$$sin\theta_1 = \frac{d_1}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + {d_1}^2}} = \frac{1-\frac{3d}{4}}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(1-\frac{3d}{4}\right)^2}} \qquad (2)$$

Comparando (1) y (2) llegamos a:

$$\frac{1-\frac{3d}{4}}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(1-\frac{3d}{4}\right)^2}} = \frac{n_2}{n_1}\frac{d}{\sqrt{1+d^2}}$$

Que es una ecuación de cuarto grado. La resolveremos con el mathematica, dando:

```
In[43]:= NSolve[(1 - 3d/4)/Sqrt[1/16 + (1 - 3d/4)^2] == d/(1.339 Sqrt[1 + d^2]), d]

In[45]:= {{d → 1.110900348309011`}}

Out[45]= {{d → 1.1109}}
```

Sin embargo lo que nos interesa no es el punto en el que la trayectoria aparente de la luz llega al suelo de la playa, sino donde converge la luz que sale del cangrejo y llega a los ojos de Fernando.

Para ello consideramos que el ojo se encuentra un milímetro mas alto (en el punto F' donde $\overline{OF} = 1{,}001\ m$), y calculamos el punto D' en el que la trayectoria aparente de la luz llegaría al suelo de la playa. Es decir, repetimos los cálculos realizados para $\overline{OF} = 1{,}001\ m$.

Una vez obtenido el punto D', el punto en el que se cruzan las rectas que contienen los segmentos $\overline{DF}$ y $\overline{D'F'}$ es una buena aproximación del punto en que Fernando cree ver al cangrejo. Este punto realmente no existe, pues no es un solo punto si no que los puntos de imagen para ángulos distintos siguen una cáustica. Lo que pasa es que el tamaño del ojo es lo suficientemente pequeño (aquí hemos considerado su diámetro aproximadamente de un milímetro) para que parezcan converger en un punto, permitiéndonos ver el objeto.

Si repetimos los cálculos para $\overline{OF} = 1{,}001\ m$ tendremos que

$$sin\theta_2 = \frac{d'}{\overline{D'F'}}$$

Pero $\overline{DF} = \sqrt{1{,}001^2 + d'^2}$ por el teorema de Pitágoras. Y por tanto:

$$sin\theta_2 = \frac{d'}{\sqrt{1{,}001^2 + d'^2}}$$

Siendo por la ley de Snell que:

$$sin\theta_1 = \frac{n_2}{n_1} sin\theta_2 = \frac{n_2}{n_1}\frac{d'}{\sqrt{1{,}001^2 + d'^2}} \qquad (1)$$

Pero podemos calcular el $sin\theta_1$ por otro camino, ya que por el teorema de Tales:

$$\frac{d'}{1{,}001} = \frac{d_2}{0{,}751} \quad \Rightarrow \quad d_2 = \frac{0{,}751d'}{1{,}001} \quad \Rightarrow \quad d_1 = 1 - \frac{0{,}751d'}{1{,}001}$$

Y sabemos que:

$$sin\theta_1 = \frac{d_1}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + {d_1}^2}} = \frac{1 - \frac{0{,}751d'}{1{,}001}}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(1 - \frac{0{,}751d'}{1{,}001}\right)^2}} \qquad (2)$$

Comparando (1) y (2) llegamos a:

$$\frac{1-\frac{0{,}751d'}{1{,}001}}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(1-\frac{0{,}751d'}{1{,}001}\right)^2}}=\frac{n_2}{n_1}\frac{d'}{\sqrt{1{,}001^2+d'^2}}$$

Que solucionaremos con el mathematica:

```
In[56]:= NSolve[(1 - 0.751 d/1.001)/Sqrt[1/16 + (1 - 0.751 d/1.001)^2] == d/(1.339 Sqrt[1.001 + d^2]), d]

In[57]:= {{d → 1.1106365898204957`}}

Out[57]= {{d → 1.11064}}
```

Las rectas que definen los dos segmentos, considerando que el origen se encuentra en O y el eje y es el definido por $\overline{OF}$ y el x es el definido por $\overline{OD}$ serán:

$$y=\frac{1}{d}x+1$$

$$y=\frac{1{,}001}{d'}x+1{,}001$$

Para hallar el punto de corte igualaremos la coordenada y quedando:

$$\frac{1}{d}x+1=\frac{1{,}001}{d'}x+1{,}001$$

Solucionándolo con el mathematica:

```
In[58]:= NSolve[1.001 x / 1.1106365898204957 + 1.001 == x / 1.110900348309011 + 1,
          x]

In[59]:= {{x → -0.8975365679288707`}}

Out[59]= {{x → -0.897537}}
```

De ahí obtenemos la coordenada y sustituyendo en la primera ecuación:

```
In[60]:= -0.8975365679288707 / 1.110900348309011 + 1

In[61]:= 0.19206383426282836`

Out[61]= 0.192064
```

La distancia aparente del cangrejo a los pies de Fernando será el módulo del vector (x,y) de posición del punto de corte de las rectas:

```
In[87]:= Sqrt[0.8975365679288707^2 + 0.19206383426282836^2]

Out[87]= 0.917856
```

Por tanto podemos afirmar, con el permiso de los posibles errores cometidos, que Fernando ve al cangrejo aproximadamente a 0,918 m de sus pies.

Obtención del tamaño aparente del cangrejito.

Para obtener el tamaño deberemos obtener el punto aparente en el que se encuentra un punto situado sobre el fondo a 0,975 m de los pies de Fernando y otro punto situado a una distancia de 1,025 m. La diferencia de distancias nos dará el tamaño aparente del cangrejito. Dado que los cálculos son idénticos, solo que cambiando el valor de $\overline{DO}$ por 0,975 y 1,025, no repetiremos el razonamiento, simplemente dejo las ecuaciones resultantes y los cálculos con mathematica:

Para 0,975 m:

$$\frac{0{,}975 - \frac{3d}{4}}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(0{,}975 - \frac{3d}{4}\right)^2}} = \frac{n_2}{n_1} \frac{d}{\sqrt{1 + d^2}}$$

$$\frac{0{,}975 - \frac{0{,}751d'}{1{,}001}}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(0{,}975 - \frac{0{,}751d'}{1{,}001}\right)^2}} = \frac{n_2}{n_1} \frac{d'}{\sqrt{1{,}001^2 + d'^2}}$$

In[63]:= NSolve$\left[\frac{0.975 - \frac{3\,d}{4}}{\text{Sqrt}\left[\frac{1}{16} + \left(0.975 - \frac{3\,d}{4}\right)^2\right]} == \frac{d}{1.339\ \text{Sqrt}[1 + d^2]},\ d\right]$

{{d → 1.0814373694959283`}}

In[64]:= NSolve$\left[\frac{0.975 - \frac{0.751\,d}{1.001}}{\text{Sqrt}\left[\frac{1}{16} + \left(0.975 - \frac{0.751\,d}{1.001}\right)^2\right]} == \frac{d}{1.339\ \text{Sqrt}[1.001 + d^2]},\ d\right]$

In[65]:= {{d → 1.081183190044095`}}

Out[65]= {{d → 1.08118}}

In[72]:= NSolve[1.001 x / 1.081183190044095 + 1.001 == x / 1.0814373694959283 + 1, x]

In[73]:= {{x → -0.8754246624573336`}}

Out[73]= {{x → -0.875425}}

In[69]:= -0.8754246624573336 / 1.0814373694959283 + 1

In[70]:= 0.19049897187723386`

Out[70]= 0.190499

In[71]:= Sqrt[0.8754246624573336^2 + 0.19049897187723386^2]

Out[71]= 0.895912

Con lo que la distancia a la que se encuentra el extremo mas próximo del cangrejo es de aproximadamente 0,896 m.

Si repetimos los cálculos para 1,025 m:

$$\frac{1{,}025-\frac{3d}{4}}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(1{,}025-\frac{3d}{4}\right)^2}}=\frac{n_2}{n_1}\frac{d}{\sqrt{1+d^2}}$$

$$\frac{1{,}025-\frac{0{,}751d'}{1{,}001}}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(1{,}025-\frac{0{,}751d'}{1{,}001}\right)^2}}=\frac{n_2}{n_1}\frac{d'}{\sqrt{1{,}001^2+d'^2}}$$

```
In[89]:= NSolve[(1.025 - 3 d/4)/Sqrt[1/16 + (1.025 - 3 d/4)^2] == d/(1.339 Sqrt[1 + d^2]), d]

In[90]:= {{d → 1.140458543845574`}}
Out[90]= {{d → 1.14046}}

In[92]:= NSolve[(1.025 - 0.751 d/1.001)/Sqrt[1/16 + (1.025 - 0.751 d/1.001)^2] == d/(1.339 Sqrt[1.001 + d^2]), d]

In[93]:= {{d → 1.1401850715151975`}}
Out[93]= {{d → 1.14019}}

In[94]:= NSolve[1.001 x / 1.1401850715151975 + 1.001 == x / 1.140458543845574 + 1,
  x]

In[95]:= {{x → -0.9196586835195009`}}
Out[95]= {{x → -0.919659}}

In[97]:= -0.9196586835195009 / 1.140458543845574 + 1

In[98]:= 0.19360621349860396`
Out[98]= 0.193606

In[99]:= Sqrt[0.9196586835195009^2 + 0.19360621349860396^2]
Out[99]= 0.939817
```

Por tanto el punto mas alejando del cangrejo se encuentra aproximadamente a 0,940 m de Fernandito de manera aparente.

No obstante para obtener la distancia entre los dos puntos no bastará con hallar la diferencia de las distancias, si no que deberemos restar ambos vectores posición y hallar el módulo de la diferencia:

```
In[112]:= Sqrt[(0.9196586835195009 - 0.8754246624573336)^2 +
             (0.19360621349860396 - 0.19049897187723386)^2]

Out[112]= 0.044343
```

Es decir, a Fernandito le parece que el cangrejito es un poco mas pequeño de lo que realmente es, en vez de medir 5 cm mide aproximadamente 4,44 cm.