Problema 1

Para llegar a la capital enemiga por el camino más corto cada flota tendrá que realizar 18 tránsitos. Los posibles encuentros, si ocurren, serán en la diagonal a mitad de camino, cuando ambas flotas hayan realizado 9 tránsitos.

Para cada tránsito que las flotas realizan en su camino hacia la diagonal, tienen dos posibles caminos que pueden seguir con la misma probabilidad. En el dibujo uno de los caminos es horizontal y el otro vertical.

Como cada uno de los caminos tiene la misma probabilidad, para calcular la probabilidad de un encuentro bastará con contar todos los caminos posibles que pueden seguir las flotas, y de estos aquellos que son favorables para un encuentro entre las flotas. La probabilidad del encuentro será el cociente entre el número de casos favorables y el número de casos posibles.

Empezaré por contar los casos posibles. Como los caminos que sigue la flota escarlata es independiente del de la azul, el número de casos posibles es el número de caminos que puede seguir la flota escarlata en 9 tránsitos multiplicado por el número de caminos que puede seguir la flota azul en otros 9 tránsitos. Para llegar a la mitad del camino, la flota escarlata realiza 9 tránsitos y en cada tránsito tiene dos posibilidades, el camino horizontal y el vertical, es decir, que en cada tránsito se multiplica por dos el número de posibilidades. El número de caminos que puede seguir la flota escarlata después de hacer 9 tránsitos es de 2^9. Lo mismo para la flota azul. Multiplicando

$$\text{Casos posibles} = 2^{18}.$$

Vamos ahora a por los casos favorables. Hay varios trucos que nos facilitarán la cuenta.

Primero sigamos a la flota roja hata el punto de encuentro, y desde allí sigamos, hacia atrás en el tiempo, el camino que ha seguido la flota azul desde su capital. El resultado es un camino que nos lleva desde una capital hasta la otra con 18 tránsitos en total. Recíprocamente cualquier camino que lleve desde una capital a otra nos da un camino para la flota escarlata y otro para la flota azul en el que las dos flotas se encuentran. Así que para contar los casos favorables nos basta con contar todos los caminos diferentes que llevan de una capital a la otra.

Segundo, un camino que lleva de una capital a la otra tiene 9 tránsitos horizontales y 9 verticales.

Tercero, fijémonos en los tránsitos horizontales. Podemos numerarlos por el número de tránsito al que corresponden, en total 9 números diferentes que van del 1 al 18. Recíprocamente cualquier combinación de 9 números diferentes del 1 al 18 nos da un camino entre las capitales. Basta con que los números correspondan a los tránsitos horizontales y el resto de los tránsitos sean verticales.

Para contar todas las comibnaciones de 9 números diferentes que van del 1 al 18 utilizamos combinaciones sin repetición de 18 elementos tomados de 9 en 9, $C(18,9)$.

$$\text{Casos favorables} = C(18,9) = \frac{18!}{9!\,9!}.$$

Ahora divido los casos favorables entre los casos posibles y obtendré la probabilidad de encuentro, esto es

$$\frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = \frac{C(18,9)}{2^{18}} = \frac{18!}{9!\,9!\,2^{18}} = \frac{12155}{65536} = 0,1855$$

o bien un 18,55% de probabilidad.

Problema 2

El método de cálculo es generalizable a cualquier tamaño de galaxia. Para una galaxia $N \times N$ el número de tránsitos hasta la diagonal es $N-1$ y el número de tránsitos hasta la capital enemiga $2N-2$). Por lo demás se repite el mismo cálculo de probabilidad.

$$\frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = \frac{C(2N-2, N-1)}{2^{2N-2}} = \frac{(2N-2)!}{(N-1)!\,(N-1)!\,2^{2N-2}}$$

Problema 3

A partir de aquí las expresiones matemáticas que me salen empiezan a ser más largas y desagradables. Habrá alguna solución más simple?

Voy a empezar por el caso 10x10 para explicar el método antes de embarrarme con fórmulas más generales.

Las dos capitales están separadas por una distancia de 18 tránsitos. Sabemos que la flota escarlata vuela 3 veces más rápido que la azul, de modo que en el día 12 la flota escarlata ha hecho 12 tránsitos y la flota azul 4. Todavía están a dos tránsitos de distancia. En el día 13 la flota escarlata ha hecho un nuevo tránsito y la azul se ha puesto en camino para realizar un quinto tránsito, pero todavía no se han podido cruzar porque estarán a dos tercios de tránsito de distancia. En el día 14 es el que tienen la oportunidad de encontrarse en pleno tránsito o pasar de largo si han elegido un camino diferente. Para la flota escarlata será el transito número 14 y para la azul el número 5.

El cálculo de la probabilidad será similar, un conteo de casos favorables y de casos posibles. Los casos favorables son los más fáciles porque no va a cambiar prácticamente nada respecto del problema 1. En los casos en los que hay encuentro, podemos seguir a la flota escarlata hasta el planeta o el tránsito en el que haya un encuentro y luego seguir hacia atrás en el tiempo a la flota azul hasta su base. Nuevamente tenemos una correspondencia uno a uno entre caminos en los que se da un encuentro entre las flotas y caminos que lleven de una base a otra. Podemos repetir la misma fórmula del problema 1.

$$\text{Casos favorables} = C(18, 9) = \frac{18!}{9!\,9!}.$$

Pasando ahora a los casos posibles, podemos multiplicar nuevamente el número de caminos diferentes que puede seguir la flota azul en 5 tránsitos por el número de caminos diferentes que puede seguir la flota escarlata en 14 tránsitos.

El cálculo del número de caminos que puede seguir la flota azul es igual de fácil que en el problema 1. En todos los tránsitos hay dos posibles caminos, el horizontal y el vertical. En total 2^5 caminos.

Para la flota escarlata la cosa cambia. Ahora hay 14 transiciones, pero no siempre hay dos caminos para elegir. A veces solo hay uno disponible. Si miramos cuántos trayectos horizontales puede seguir la flota, encontramos que cualquier número entre 5 y 9. Veamos por ejemplo como calcular cuantos caminos posibles hay con 5 trayectos horizontales y 9 verticales. En ese caso tomando los números de transición que corresponden a los trayectos horizontales tenemos 5 números del 1 al 14. Si calculamos todas las combinaciones de estos números tendremos $C(14, 5)$. Pero además habrá que sumar los casos en los que hay 6, 7, 8 y 9 trayectos horizontales. El número total de caminos que puede tomar la flota escarlata es

$$C(14, 5) + C(14, 6) + C(14, 7) + C(14, 8) + C(14, 9) = \sum_{k=5}^{9} C(14, k).$$

Multiplicando por el número de caminos que podía coger la flota azul ya tenemos el total de casos posibles.

$$\text{Casos posibles} = 2^5 \sum_{k=5}^{9} C(14, k).$$

Y la probabilidad del encuentro

$$\frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = \frac{C(18,9)}{2^5 \sum_{k=5}^{9} C(14,k)} = \frac{48620}{430144} = 0,1130.$$

Para la galaxia más general, de tamaño $N \times N$, el método de cálculo es el mismo pero con expresiones algo más complicadas.

Primero tengo que calcular el número de tránsitos TA que realiza la flota azul y el número de tránsitos TS que lleva a cabo la flota escarlata. Para eso utilizaré una función $techo(x)$ que aplicada a un número real positivo, devuelve el propio x si es entero o el entero inmediatamente superior si no lo es.

$$TA = techo(\frac{2N-2}{4}), \quad TE = techo(\frac{3(2N-2)}{4}).$$

Los factores 1 y 3 son las velocidades relativas de las dos flotas y el denominador 4 es la suma de las dos velocidades.

El cálculo sigue la misma línea que el del caso 10×10.

$$\text{Casos favorables} = C(2N-2, N-1),$$

$$\text{Número de caminos posibles de la flota azul} = 2^{TA},$$

$$\text{Número de caminos posibles de la flota escarlata} = \sum_{k=TE-N+1}^{N-1} C(TE,k),$$

y la probabilidad de que haya un encuentro

$$\frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = \frac{C(2N-2,N-1)}{2^{TA} \sum_{k=TE-N+1}^{N-1} C(TE,k)}.$$