Problema 1

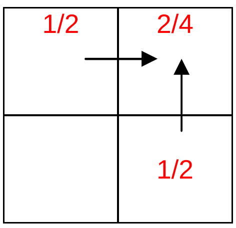
El comandante de la flota escarlata está muy interesado en saber cual es la probabilidad de encuentro con la flota azul, que si ocurre tal encuentro será en algún planeta de la diagonal central. Primero tiene que calcular la probabilidad de visita de cada planeta en el viaje hasta la diagonal central. Sabe que en cada tránsito hay dos trayectos posibles y que la probabilidad de cada uno es del 50%.

Para los planetas exteriores solo hay un camino que lleve a ellos. Como en cada tránsito hay dos posibilidades, la probabilidad de visita de un planeta exterior es la mitad de la del planeta visitado en el anterior tránsito.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	1/512									
9	1/256									
8	1/128									
7	1/64									
6	1/32									
5	1/16									
4	1/8									
3	1/4									
2	1/2									
1		1/2	1/4	1/8	1/16	1/32	1/64	1/128	1/256	1/512

Para los planetas del interior es diferente. A cada planeta del interior se puede llegar en un solo tránsito desde dos planetas diferentes. El comandante hace la siguiente cuenta: Para llegar al planeta (2,2), podemos hacerlo en un tránsito desde el (1,2) y desde el (2,1). La probabilidad de llegar al planeta (1,2) es ½, y la de hacer un tránsito desde ese planeta también ½, así que la probabilidad combinada de llegar al planeta (2,2) desde el (1,2) es ¼. Lo mismo para llegar al planeta (2,2) desde el planeta (2,1). Sumando las dos probabilidades la probabilidad total de llegar al planeta (2,2) es 2/4.

El numerador 2 es el número de caminos que llevan a ese planeta, mientras que el denominador 4 es el número total de caminos posibles hasta el tránsito 2.



Para un planeta general del interior, la probabilidad de visita se calculará a partir de la probabilidad de los planetas anteriores.

$$P = \frac{P_1 + P_2}{2}.$$

La probabilidad será una fracción donde el numerador es el número de caminos que lleva a ese planeta y el denominador es el número de caminos totales para el número de tránsitos que hace falta para llegar a ese planeta.

El número de caminos que lleva a cada planeta se calcula sumando el número de caminos de los dos planetas vecinos.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	1									
9	1	9								
8	1	8	36							
7	1	7	28	84						
6	1	6	21	56	126					
5	1	5	15	35	70	126				
4	1	4	10	20	35	56	84			
3	1	3	6	10	15	21	28	36		
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1		1	1	1	1	1	1	1	1	1

El denominador simplemente se va multiplicando por dos con cada nuevo tránsito.

Tránsito		1	2	3	4	5	6	7	8	9
Denominador		2	4	8	16	32	64	128	256	512

Dividiendo el número de caminos que llevan a un planeta entre el número de caminos totales nos da la probabilidad de llegar a ese planeta. Por ejemplo la probabilidad de que la flota escarlata llegue al planeta (9,2) es 9/512 y para el planeta (8,3) 36/512.

Ahora vamos a cambiar de punto de vista y nos introducimos en el puente de mando de la flota azul donde el comandante azul está haciendo sus propios sesudos cálculos. El comandante quiere saber cual es la probabilidad de encuentro una vez que se encuentren de viaje, después de cierto número de tránsitos. Piensa acertadamente que si se encuentra ya en un planeta a medio camino, la probabilidad de encuentro con la otra flota habrá cambiado.

El comandante azul sabe en qué planeta está la flota azul pero ignora donde está la flota escarlata hasta que se encuentre con ella. Sin embargo sabe calcular la probabilidad de que la flota escarlata visite cada planeta y quiere utilizar su conocimiento sobre la situación de la flota azul para actualizar la probabilidad de encuentro. De hecho quiere saber cual es la probabilidad de encuentro para cada planeta que pueda visitar la flota azul en su viaje hacia la diagonal central.

Para los planetas de la diagonal central es fácil saber la probabilidad de encuentro, es justo la probabilidad de visita de la flota escarlata que acabamos de calcular.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	1/512									
9		9/512								
8			36/512							
7				84/512						
6					126/512					
5						126/512				
4							84/512			
3								36/512		
2									9/512	
1										1/512

Para los demás planetas en tránsito hacia la diagonal, comandante azul hace el siguiente razonamiento. Supongamos que en el tránsito 8 mi flota llega al planeta (9,3) de modo que solo falta un tránsito para llegar a la diagonal. Desde el planeta (9,3) podemos llegar en el siguiente tránsito al (8,3) y al (9,2), con un 50% de probabilidad de visita de cada planeta. Si visitamos el planeta (9,2) la probabilidad de encuentro es 9/512 y si visitamos el (8,3) la probabilidad de encuentro es de 36/512. Como tenemos un 50% de probabilidad de visitar cada planeta, la probabilidad de encuentro una vez que visitemos el planeta (9,3) será la mitad de 9/512 sumada a la mitad de 36/512. En total 45/512.

36/512	45/1024
	9/512

Con este método puede calcular la probabilidad de encuentro cuando la flota azul está en cualquier planeta. Podemos calcular la probabilidad para todos los planetas en el viaje de la flota azul hacia la diagonal central.

$$P = \frac{P_1 + P_2}{2}$$

Numeradores:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	1	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620
9	1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310
8	1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440
7	1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005
6	1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002
5	1	5	15	35	70	126	210	330	495	715
4	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220
3	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		1	1	1	1	1	1	1	1	1

Para los denominadores:

Transito	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Denominadores	262144	131072	65536	32768	16384	8192	4096	2048	1024	512

Al fin y al cabo lo que estamos haciendo es fracciones en las que el numerador es el número de caminos desde el planeta en cuestión hasta la base roja, y el denominador es 2 elevado al número de tránsitos que haya que realizar para llegar a la base roja.

Con este método hemos calculado la probabilidad de que la flota azul tenga un encuentro cuando sale de su base, y es 48620/262144.

Problema 2

El cálculo se puede generalizar a una galaxia N x N si nos damos cuenta de que para calcular el número de caminos que llevan a cada planeta se rellena un triángulo de Al-Karaji (conocido también como triángulo de Yanghui, y también de Tartaglia y de Pascal).

Para la galaxia 10 x 10 la probabilidad de encuentro es $\frac{C(18,9)}{2^{18}} = \frac{18!}{2^{18}9!9!}$, donde C(18,9) son las combinaciones de 18 elementos tomados de 9 en 9.

Para la galaxia N x N la probabilidad es $\frac{C(2N-2,N)}{2^{2N-2}} = \frac{(2N-2)!}{2^{2N-2}(N-1)!(N-1)!}$.

Problema 3, caso 10 x 10

El cálculo cambia cuando la flota escarlata lleva el triple de velocidad que la flota azul. Para la galaxia 10x10, el posible encuentro se produce no en un planeta sino en pleno tránsito, cuando la flota escarlata está haciendo el tránsito número 14 y la flota azul el número 5.

Las probabilidades de visita de planetas en el viaje hacia la diagonal central son ya conocidas. Cuando la flota escarlata visita planetas más allá de la diagonal central el cálculo sigue siendo el mismo para los planetas interiores de la galaxia, porque sigue habiendo dos trayectos posibles para cada tránsito.

$$P = \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}P_2$$

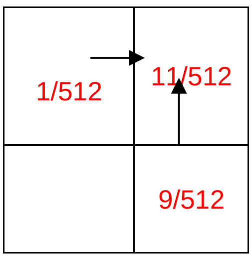
Pongo los numeradores en la siguiente tabla.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	1					1	1	1	1	
9	1	9	45	165	495	1287	4	3	2	1
8	1	8	36	120	330	792	1716	6	3	1
7	1	7	28	84	210	462	924	1716	4	1
6	1	6	21	56	126	252	462	792	1287	1
5	1	5	15	35	70	126	210	330	495	
4	1	4	10	20	35	56	84	120	165	
3	1	3	6	10	15	21	28	36	45	
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1		1	1	1	1	1	1	1	1	1

Los denominadores siguen siendo potencias de 2.

Transito	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Denominadores	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192

Para los planetas exteriores, una vez que la flota escarlata ha pasado la diagonal central, el cálculo de la probabilidad es un poco diferente. Desde un planeta exterior solo hay un tránsito posible por lo que no hay que dividir por dos la probabilidad de tránsitos desde ese planeta. Por ejemplo para el planeta (2,10) la probabilidad es la suma de la de (1,10) más la mitad de la de 9/512.



En general: $P = P_1 + \frac{1}{2}P_2$.

Con esto podemos completar el cuadro de numeradores para las probabilidades de visita de planetas. Los números que aparecen en los planetas exteriores ya no son los del triángulo de Pascal.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	1	11	67	299	1093	1	1	1	1	
9	1	9	45	165	495	1287	4	3	2	1
8	1	8	36	120	330	792	1716	6	3	1
7	1	7	28	84	210	462	924	1716	4	1
6	1	6	21	56	126	252	462	792	1287	1
5	1	5	15	35	70	126	210	330	495	1093
4	1	4	10	20	35	56	84	120	165	299
3	1	3	6	10	15	21	28	36	45	67
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	11
1		1	1	1	1	1	1	1	1	1

Podemos comprobar que la suma de los números de la diagonal es igual al denominador de esa diagonal.

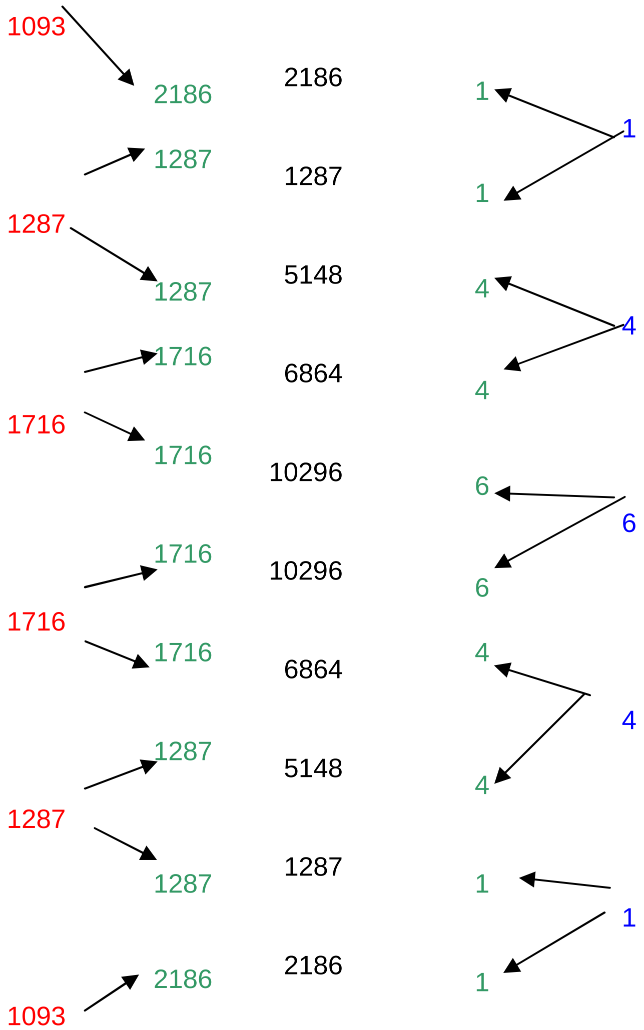
Ahora ya podemos calcular la probabilidad de que las flotas se encuentren en el último tránsito.

Después de que la flota azul ha hecho el cuarto tránsito, se encuentra en alguno de los planetas (6,10) a (10,6) y para el siguiente tránsito tienen dos posibilidades, cada uno con un 50% de probabilidad. Si hay una probabilidad 4/16 de estar en el planeta (7,9), la probabilidad de cada uno de los dos tránsitos que salen de ese planeta es 4/32.

Para la flota escarlata ocurre casi lo mismo, salvo que en los dos planetas exteriores (5,10) y (10,5), solo hay un tránsito posible. La probabilidad de tránsito desde uno de esos planetas es la misma que la de visita del planeta.

En la tabla de abajo indico las probabilidades de visitas a planetas y de los tránsitos. De nuevo están por un lado los numeradores, y debajo los denominadores que son comunes. He marcado en rojo los numeradores de la probabilidad de visita de la flota roja a planetas después del tránsito 13, en azul los de la flota azul después del tránsito 4. En verde los de las probabilidades de los tránsitos.

Multiplicando las probabilidades de los tránsitos de la flota roja y la flota azul en trayectos en los que puede haber encuentro, aparecen, en negro, los numeradores de las probabilidades de que haya encuentro. Sumando a todos los trayectos y dividiendo por el numerador, sale una probabilidad $\frac{51562}{524288} = 9{,}83\%$.



Numerador			51562		
Denominador	8192	16384	524288	32	16
Probabilidad			9,83%		

Problema 3, caso N x N

Con vistas a buscar una fórmula que sirva para la probabilidad del caso general N x N para cualquier velocidad de las flotas, primero voy a intentar evitar el cálculo de probabilidades de los tránsitos. De momento seguiré utilizando como ejemplo el caso 10 x 10.

Supongamos que ha habido un encuentro entre las flotas. Eso quiere decir que el planeta al que va la flota escarlata en el tránsito 14 es el mismo que el planeta del que salió la flota azul en el tránsito 4.

Vamos a ver que pasa con el recíproco. Supongamos que la flota escarlata va en el tránsito 14 hacia el planeta en el que estaba la flota azul en el tránsito 4. Eso no quiere decir que se encuentren en el tránsito, porque la flota azul tiene dos trayectos disponibles, uno por el que va la flota escarlata y otro por el que no. Pero los dos trayectos tienen la misma probabilidad, así que podemos asegurar que la probabilidad de encuentro en tránsito es la mitad de la probabilidad de que el planeta al que va la flota escarlata en el tránsito 14 es el mismo que el que visita la flota azul en el tránsito 4.

Vamos a comprobarlo:

Completo el cuadro de numeradores con el tránsito 14 de la flota escarlata.

						1	1	1	1	
1	11	67	299	1093	3473		4	3	2	1
1	9	45	165	495	1287	3003		6	3	1
1	8	36	120	330	792	1716	3432		4	1
1	7	28	84	210	462	924	1716	3003		1
1	6	21	56	126	252	462	792	1287	3473	
1	5	15	35	70	126	210	330	495	1093	
1	4	10	20	35	56	84	120	165	299	
1	3	6	10	15	21	28	36	45	67	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	11	
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	

Con estos datos la probabilidad de encuentro es:

$$\frac{3473\cdot 1+3003\cdot 4+3432\cdot 6+3003\cdot 4+3473\cdot 1}{2\cdot 2^{14}\cdot 2^{4}}=\frac{51562}{524288}=9{,}83\%$$

Bien, parece que funciona.

El siguiente truco me va a servir para calcular las probabilidades de visita de los planetas exteriores, que hemos visto que no cumplen lo que se esperaría del triángulo de Pascal.

Vamos a suponer que la flota escarlata no está constreñida por los bordes de la galaxia sino que puede salir de ella con la regla de tener dos trayectos por tránsito. De este modo el número de caminos si se podrá calcular con el triángulo de Pascal.

1														
1	14													
1	13	91												
1	12	78	364											
1	11	66	286	1001		1	1	1	1					
1	10	55	220	715	2002		4	3	2	1				
1	9	45	165	495	1287	3003		6	3	1				
1	8	36	120	330	792	1716	3432		4	1				
1	7	28	84	210	462	924	1716	3003		1				
1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002					
1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001				
1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	364			
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Notar que para el planeta (6,10) la probabilidad de visita es

$$\frac{1+14+91+364+1001+2002}{2^{14}}=\frac{3473}{16384}.$$

Ahora podríamos calcular la probabilidad de encuentro, multiplicando las probabilidades de visita de planetas por parte de las dos flotas, la probabilidad de encuentro es, desglosando la probabilidad de visita de (6,10) y (10,6):

$$\frac{2\cdot(1\cdot1+14\cdot1+91\cdot1+364\cdot1+1001\cdot1+2002\cdot1+3003\cdot4)+3432\cdot6}{2^{19}}=\frac{51562}{524288}=9{,}83\%$$

Pero tenemos una forma rápida de calcular estas sumas y productos para los números que quedan dentro de la galaxia. La misma forma en que hemos calculado la probabilidad total para el problema 1:

1														
1	14													
1	13	91												
1	12	78	364											
1	11	66	286	1001										
1	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620					
1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310					
1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440					
1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005					
1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002					
1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001				
1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	364			
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

48620 es el número de caminos entre una base y otra, que hemos calculado siguiendo el triángulo de Pascal, combinaciones de 18 elementos tomados de 9 en 9, C(18,9).

Además hay que añadir la contribución de los caminos que quedan ahora fuera de la galaxia.

La probabilidad de encuentro utilizando C(18,9) es

$$\frac{C(18,9)}{2^{19}}+\frac{C(14,0)+C(14,1)+C(14,2)+C(14,3)+C(14,4)}{2^{18}}=\frac{48620}{524288}+\frac{2942}{524288}=\frac{51562}{524288}$$

El mismo método se puede utilizar para una galaxia general N x N. Solo voy a dar los resultados para no tener que repetir todo el razonamiento.

Si T_E es el número de días que tarda la flota escarlata en hacer un tránsito y T_A es el número de días que tarda la flota azul, el encuentro se producirá en el tránsito número

$$N_E = techo((2N-2)\frac{T_A}{T_E+T_A})$$

de la flota escarlata y en el

$$N_A = techo((2N-2)\frac{T_E}{T_E+T_A})$$

de la flota azul. La función $techo(x)$ devuelve x si es un entero y el entero inmediatamente superior si no lo es.

El encuentro entre las flotas, si ocurre, puede ser en un planeta o en un tránsito entre planetas. Será en un planeta cuando $(2N-2)\frac{T_A}{T_E+T_A}$ sea un entero, con lo que ocurrirá además que $N_A+N_E=2N-2$. Cuando el encuentro sea en un tránsito ocurrirá que la expresión que entra como argumento de la función techo no es entera y $N_A+N_E=2N-1$.

La fórmula para la probabilidad del encuentro depende de que flota va más rápida. Supondré que la más rápida es la escarlata o que las dos son igual de rápidas $T_E \le T_A$.

La probabilidad de encuentro de las dos flotas es ahora

$$\frac{C(2N-2,N-1)+2\left[C(N_E,0)+C(N_E,1)+\ldots+C(N_E,N_E-N)\right]}{2^{N_E+N_A}},$$

donde recordamos que $C(M,N)=\dfrac{M!}{N!(M-N)!}$.