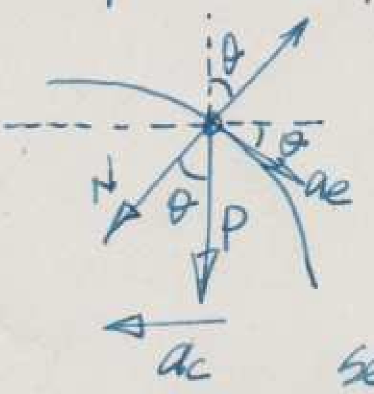
Sobre la dinámica del descenso

En primer lugar se analiza la trayectoria que sigue el esquiador en su descenso y el movimiento que sufre la colina. Para ello se plantea el equilibrio de fuerzas que describe su dinámica



$a \rightarrow$ aceleración del esquiador respecto del suelo
$a_e \rightarrow$ aceleración del esquiador respecto de la colina
$a_c \rightarrow$ aceleración de la colina respecto del suelo

se cumple que $a = a_e - a_c$

Planteando el equilibrio de fuerzas que actúan:

sobre el eje horizontal: $N \operatorname{sen}\theta = m(a_e \cos\theta - a_c)$
sobre el eje vertical: $mg - N\cos\theta = m a_e \operatorname{sen}\theta)$
sobre la colina $N \operatorname{sen}\theta = M a_c$

Despejando la relación entre las aceleraciones del esquiador y la colina:

$$\left.\begin{aligned} N \operatorname{sen}\theta &= m a_e \cos\theta - m a_c \\ N \operatorname{sen}\theta &= M a_c \end{aligned}\right\} \rightarrow M a_c = M a_e \cos\theta - M a_c \rightarrow$$

$$\rightarrow a_c = a_e \cos\theta - a_c \rightarrow a_c = a_e \frac{\cos\theta}{2}$$

Y la aceleración respecto al suelo del esquiador:

$$\left.\begin{aligned} a = a_e - a_c \rightarrow a &= a_{ex} - a_c = a_e \cos\theta - a_c \\ a_c &= a_e \frac{\cos\theta}{2} \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

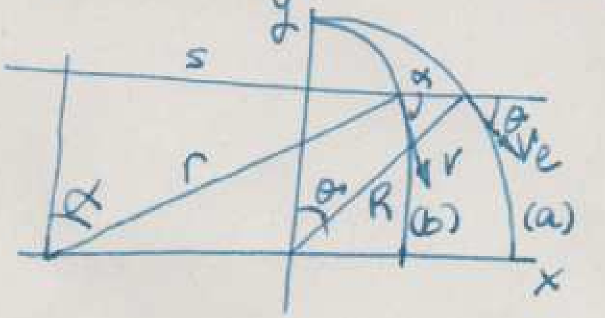
$$\rightarrow a = a_e \cos\theta - a_e \frac{\cos\theta}{2} \rightarrow a = a_e \frac{\cos\theta}{2}$$

De esta relación se deduce que la colina retrocede con la misma aceleración que tiene el esquiador respecto al suelo (con sentido contrario). El esquiador, visto desde la colina avanza con aceleración doble.

La colina retrocede la mitad de lo que avanza el esquiador sobre la colina.

Esto es lógico, pues el sistema conjunto de la colina y el esquiador mantiene su centro de gravedad sin desplazamiento horizontal alguno.

Se puede comparar, según esto, superpuestas las trayectorias del esquiador respecto del suelo y respecto de la colina



Siendo:

V_e → velocidad del esquiador respecto de la colina

V → velocidad del esquiador respecto del suelo

R → radio de giro del esquiador visto desde la colina

r → radio de giro de la trayectoria de descenso respecto del suelo

Es claro que la trayectoria que sigue el esquiador visto desde la colina es una circunferencia de radio R - curva (a)

También es claro que, visto desde el suelo, que el esquiador por cada posición del ángulo θ, recorrerá la mitad de distancia horizontal, que en el caso ~~contrario~~ anterior desde la colina - curva (b)

La ecuación que describe la curva (a) será: $x^2+y^2=R^2$

La ecuación que describe la curva (b) será: $4x^2+y^2=R^2$

Dado que las velocidades de descenso del esquiador, visto desde la colina y visto desde el suelo serán para todos los valores de θ, tangentes a las curvas (a) y (b) respectivamente, se pueden obtener matemáticamente algunas relaciones entre ambas velocidades:

Pendiente de la curva (a): $x^2+y^2=R^2$

$$x^2+y^2=R^2 \Rightarrow 2x\,dx+2y\,dy=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\theta=-\frac{x}{y}$$

Pendiente de la curva (b) $= 4x^2+y^2=R^2$

$$4x^2+y^2=R^2 \Rightarrow 8x\,dx+2y\,dy=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-4\frac{x}{y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha=-4\frac{x}{y}$$

Teniendo en cuenta que en la curva (a): $x=R\,\mathrm{sen}\,\theta$

directamente obtenemos que $\operatorname{tg}\theta=-\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\cos\theta}$ $\quad y=R\cos\theta$

Teniendo en cuenta que en la curva (b): $x=\frac{R}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta$

igualmente obtenemos que: $\operatorname{tg}\alpha=-2\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\cos\alpha}$ $\quad y=R\cos\theta$

Por tanto, y para todo valor de θ, se cumple que $\operatorname{tg}\alpha=2\operatorname{tg}\theta$

Analizando la trayectoria del esquiador en su descenso, obtenemos, por aplicación de la geometría diferencial, el radio de giro para cada uno de los valores de θ, por como inverso de la curvatura de la trayectoria:

$$r=\frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|} \qquad \frac{dy}{dx}=-4\frac{x}{y} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=-4\frac{\frac{dx}{dx}y-x\frac{dy}{dx}}{y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=-4\frac{y+x\,4\frac{x}{y}}{y^2}=-4\frac{y+4\frac{x^2}{y}}{y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = -4\,\frac{y^2+4x^2}{y^3}$$

teniendo en cuenta que en la curva (b): $4x^2+y^2=R^2$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = -4\,\frac{R^2}{y^3}, \quad y = R\cos\theta \quad \Rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-4}{R\cos^3\theta}.$$

volviendo al calculo del radio de giro:

$$r = \frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}$$

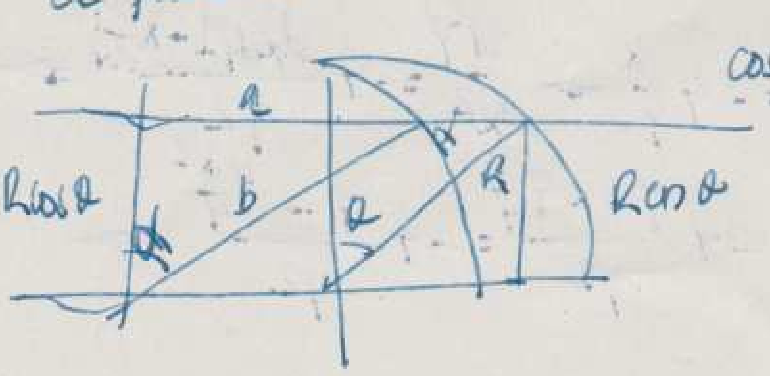
$$\frac{dy}{dx} = -2\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{4}{R\cos^3\theta} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{\left(1+4\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}\right)^{3/2}}{4/R\cos^3\theta} = R\,\frac{\cos^3\theta\left(1+4\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}\right)^{3/2}}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = R\,\frac{(\cos^2\theta+4\operatorname{sen}^2\theta)^{3/2}}{4} = R\,\frac{(\cos^2\theta+4-4\cos^2\theta)^{3/2}}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{R}{4}(4-3\cos^2\theta)^{3/2}$$

Por geometría se obtiene otro valor que se necesita para resolver el problema:



$$\cos\alpha = \frac{R\cos\theta}{b}$$

$$b^2 = a^2 + R^2\cos^2\theta$$

$$b^2 = a^2 + R\cos^2\theta$$

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tg}\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \\ \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \\ \operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{tg}\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = 2\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \Rightarrow \frac{a}{R\cos\theta} = 2\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow a = 2R\operatorname{sen}\theta \\ b^2 = a^2 + R^2\cos^2\theta \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow b^2 = 4R^2\operatorname{sen}^2 + R^2\cos^2\theta \Rightarrow b^2 = R^2(4 - 3\cos^2\theta) \\ \cos\alpha = \dfrac{R\cos\theta}{b} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

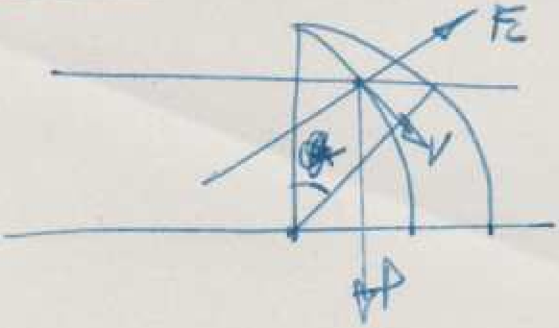
$$\Rightarrow \cos\alpha = \cos\theta\,(4 - 3\cos\theta)^{-1/2}$$

En resumen, de las trayectorias del esquiador, en su descenso desde el punto de vista de un observador situado en el suelo se ha calculado que:

Su radio de giro: $r = \dfrac{R}{4}(4 - 3\cos^2\theta)^{3/2}$

y su ángulo : $\cos\alpha = \cos\theta\,(4 - 3\cos^2\theta)^{-1/2}$

Sobre el momento del despegue



$$P\cos\alpha = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow mg\cos\alpha = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow g\cos\alpha = \dfrac{v^2}{r} \Rightarrow v^2 = g\,r\cos\alpha \\ r = \dfrac{R}{4}(4 - 3\cos^2\theta)^{3/2} \\ \cos\alpha = \cos\theta\,(4 - 3\cos^2\theta)^{-1/2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = g\,R/4\,(4 - 3\cos^2\theta)^{3/2}\cos\theta\,(4 - 3\cos^2\theta)^{-1/2} = g\,R/4\,(4 - 3\cos^2\theta)\cos\theta$$

Sobre la velocidad de la cuña

Como ya se ha comentado la velocidad de la cuña es igual y de sentido contrario a la velocidad del esquiador respecto del suelo

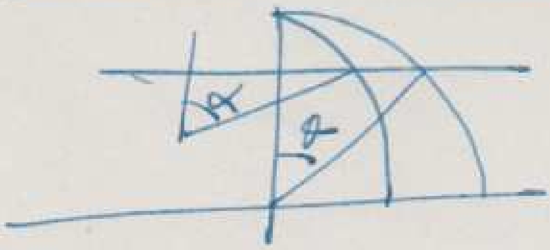
$$v_c = V\cos\alpha$$

Operando con la expresión según lo que ya conocemos:

$$\left.\begin{aligned} V_c &= V\cos\alpha \\ \cos\alpha &= \cos\theta\,(4-3\cos^2\theta)^{-1/2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow V_c = V\cos\theta\,(4-3\cos^2\theta)^{-1/2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_c^2 = V^2\cos^2\theta\,(4-3\cos^2\theta)^{-1}$$

Sobre la conservación de la energía



En todo momento, la variación de la energía potencial del esquiador en su trayectoria de descenso, supondrá un aumento de la energía potencial de la cuña y del propio esquiador

Por tanto:

$$\left.\begin{aligned} mgR &= mgR\cos\theta + \tfrac{1}{2}mV^2 + \tfrac{1}{2}mV_c^2 \\ V^2 &= g\frac{R}{4}(4-3\cos^2\theta)\cos\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow mgR &= mgR\cos\theta + \tfrac{1}{2}mg\frac{R}{4}(4-3\cos^2\theta)\cos\theta + \tfrac{1}{2}mV_c^2 \\ V_c^2 &= V^2\cos^2\theta\,(4-3\cos^2\theta)^{-1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow mgR = mgR\cos\theta + \frac{1}{2}m\frac{R}{4}(4-3\cos^2\theta)\cos\theta + \frac{1}{2}v^2 m\cos^3\theta(4-3\cos^2\theta)^{-1} \left.\begin{matrix} \\ v^2 = gR/4\,(4-3\cos^2\theta)\cos\theta \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow mgR = mgR\cos\theta + \frac{1}{2}m\frac{R}{4}(4-3\cos^2\theta)\cos\theta + \frac{1}{2}gm\frac{R}{4}\cos^3\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = \cos\theta + \frac{1}{8}(4-3\cos^2\theta)\cos\theta + \frac{1}{8}\cos^3\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8 = 8\cos\theta + (4-3\cos^2\theta)\cos\theta + \cos^3\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8 = 8\cos\theta + 4\cos\theta - 3\cos^3\theta + \cos^3\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8 = 12\cos\theta - 2\cos^3\theta \Rightarrow \left.\begin{matrix} \cos^3\theta - 6\cos\theta + 4 = 0 \\ \cos\theta = x \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 - 6x + 4 = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 0{,}7325 \\ x = \cos\theta \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\theta = 0{,}7325 \Rightarrow \theta = \arccos 0{,}7325 = 0{,}7494 \text{ rad} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta = 42{,}94^\circ}$$

Vicente López, a 21 de mayo de 2013