SIN ROZAMIENTO

Antes de nada, realizamos un esquema de la situación y hallamos la expresión del ángulo θ. En mi caso he llamado V_X a la velocidad en el sentido de la pendiente y V_Y a su perpendicular en el plano. Recordemos que el objeto tiene una velocidad inicial V_0 precisamente en la dirección Y.

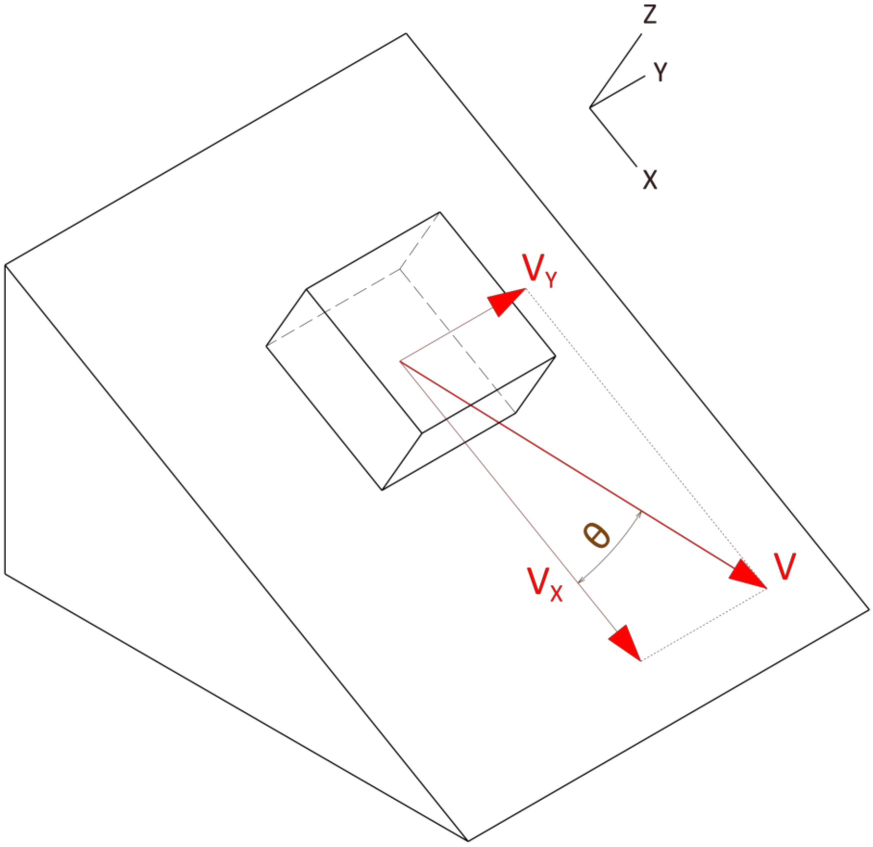

FIGURA 1

① $$\tan\theta = \frac{V_Y}{V_X} \quad \rightarrow \quad \theta = \operatorname{atan}\frac{V_Y}{V_X}$$

En el caso ideal en el que no hay rozamiento, ni con la superficie ni con el aire, ambas velocidades pueden analizarse de manera totalmente independiente. ¿Por qué? Echemos un vistazo a las fuerzas que entran en juego:

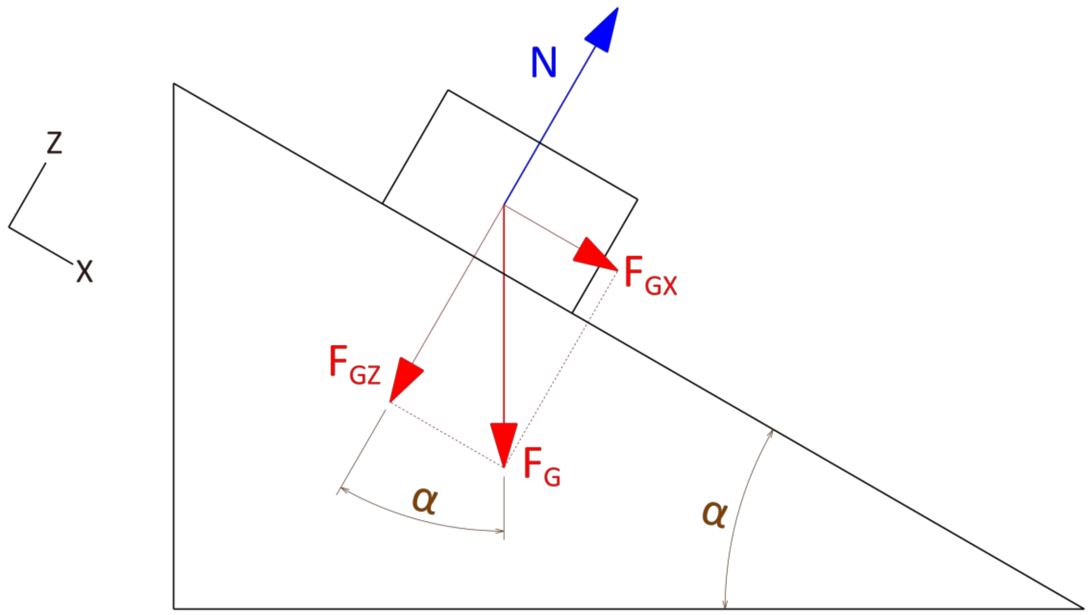

FIGURA 2

Como vemos, las únicas fuerzas sobre el cuerpo son la de la gravedad F_G (descompuesta en las componentes X y Z) y la fuerza normal N, que es la que ejerce el plano sobre el cuerpo e impide que éste lo atraviese. Sin rozamiento, **no existe ninguna fuerza en el eje Y.** La normal y la componente de la fuerza de la gravedad se anulan en Z, de modo que la única fuerza resultante es la componente del peso en X. Es algo similar a lo que ocurre cuando se estudia un tiro parabólico: se considera la composición de dos movimientos, uno con velocidad constante y otro perpendicular, uniformemente acelerado.

Hallamos, por tanto, la fuerza resultante en X. Basta con conocer la expresión de la fuerza de la gravedad y hallar su proyección. Siendo *m* la masa del objeto y *g* la aceleración de la gravedad:

$$③ \quad \begin{cases} F_G = mg \\ F_X = F_G \cdot \operatorname{sen}\alpha \end{cases} \quad \rightarrow \quad F_X = mg \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

Aplicamos la Segunda Ley de Newton:

$$④ \quad F_X = a_X m \rightarrow a_X = \frac{F_X}{m}$$

Ahora, dado que sólo existe una fuerza constante en esa dirección, estamos ante un movimiento uniformemente acelerado. Como además la velocidad inicial en esta dirección es nula:

$$⑤ \quad V_X = a_X t$$

Combinando ⑤ con ④ y ③

$$⑥ \quad V_X = a_X t \rightarrow V_X = \frac{F_X}{m} t \rightarrow V_X = \frac{\cancel{m}g \cdot \operatorname{sen}\alpha}{\cancel{m}} t \rightarrow V_X = g \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot t$$

Como puede verse, la velocidad en X es independiente de la masa. Supongo que Galileo asentiría satisfecho.

La velocidad en el eje Y la conocemos desde el principio. Si, como hemos dicho, no hay fuerzas aplicadas en este eje, el cuerpo se seguirá moviendo en esta dirección con su velocidad inicial (Primera Ley de Newton).

⑦ $$\mathrm{V_Y} = \mathrm{V_0}$$

Por tanto ya tenemos ambas velocidades. θ queda:

⑧ $$\theta = \operatorname{atan}\frac{V_Y}{V_X} \quad \rightarrow \quad \theta = \operatorname{atan}\frac{V_0}{g \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot t}$$

Que cumple con lo predicho en el enunciado de que en el infinito el ángulo valdría 0. Es decir, pasado un tiempo *muy muy largo*, el objeto se mueve cuesta abajo.

⑨ $$\theta_{t\to\infty} = \operatorname{atan}\frac{V_0}{g \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \infty} \rightarrow \theta_{t\to\infty} = \operatorname{atan} 0 \rightarrow \theta_{t\to\infty} = 0$$

Si introducimos los valores numéricos concretos de este problema (siempre me gusta hacerlo al final, para no ir perdiendo conceptos y generalidad por el camino):

⑩ $$\begin{cases} g = 10\, m/s \\ \alpha = 30° \rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \theta = \operatorname{atan}\frac{V_0}{5\,t}$$

Como apunte final, nótese que el ángulo se hace 0 porque la velocidad cuesta abajo (en X) se hace infinita, mientras que la velocidad perpendicular (en Y) se mantiene constante.