Desafíos - Péndulo estelar

1. Planteamiento

Según la mecánica newtoniana (y en un contexto unidimensional):

$$F = ma \tag{1}$$

La fuerza en el caso de la gravitación se expresa como:

$$\vec{F}_{12} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}_{12} \tag{2}$$

Nuestra intención es llegar a una expresión de esta fórmula análoga a la de un oscilador simple, aprovechando el hecho que $D >> d$ [1] La ecuación que describe un oscilador simple es

$$F = -kx \tag{3}$$

Durante el desarrollo nos basaremos en manipular (2) hasta conseguir (3)

2. Desarrollo

Primeramente, observamos que por cuestiones de simetría del problema el movimiento de m esta ceñido a una recta. Esto es debido a que cada una de las dos estrellas fijas tiene la misma masa y está a la misma distancia de m. Por lo tanto, la fuerza que ejercerán sobre m será de igual módulo y, en su componente vertical, de signo opuesto. Por lo tanto la única fuerza efectiva será la de la componente horizontal o x. Este argumento tan visual puede formalizarse sabiendo que $F_y = F\cos\alpha$ y $F_x = F\sin\alpha$ donde α es el ángulo entre la recta que une las dos M y la que une M con m. Además, las 2 M ejercerán la misma fuerza horizontal a m, por lo tanto $F_{total} = F_M + F_M = 2F_M$ Si incluimos todo lo que hemos dicho en (2), obtenemos

$$F_y = 0 \tag{4}$$

[1] mirar el dibujo-diagrama-croquis de la situación colgado en el tamiz y recordar que sin ese dibujo todo esto es nada (bueno, la nada no es por lo tanto esto no seria, que ya es lo que quería decir yo). Nos remitiremos indirectamente a él a menudo, pero nunca se mostrará. ¡Será nuestro tapiz perdido de la creación, nuestros capítulos perdidos de Dr. Who! Y además no sé adjuntar imágenes.

$$F_x = -\frac{2GMm}{r^2}\sin\alpha \tag{5}$$

(A partir de ahora para simplificar la escritura definimos $a \equiv 2GMm$)

Podemos expresar $\sin\alpha$ y r^2 en función de x y D $\sin\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+D^2}}$ y $r^2 = x^2 + D^2$ (1.4) nos queda

$$F_x = -\frac{ax}{\sqrt{x^2 + D^2}^3} \tag{6}$$

I debido a que $D >> x$ el término x^2 es despreciable respecto D^2

$$F_x = -\frac{ax}{D^3} \tag{7}$$

que tiene la forma de (3). Queda demostrado que cuando la oscilación es pequeña nos encontramos delante un movimiento armónico simple.

La anterior expresión es una ecuación diferencial de la cual podemos obtener la ecuación del movimiento del pequeño astro de masa m. Saltándome los pasos intermedios y yendo directamente al resultado obtenemos:

$$x(t) = d\cos(wt) \tag{8}$$

Donde $w \equiv \sqrt{\frac{2GM}{D^3}}$