Primera parte:

Demuestra que, si d << D, la estrella pequeña realiza un movimiento armónico simple. Tendrás que despreciar algún término en algún momento para poder demostrarlo, y dejo a tu criterio cuándo y cómo hacerlo.

Para poder comprobar que el movimiento de la masa m es armónico simple tomo d como una variable que indica la distancia entre la estrella pequeña y el punto de equilibrio en cada momento.

La distancia entre m y M, por el teorema de Pitágoras es $\sqrt{(D^2+d^2)}$.

La fuerza con la que atrae cada estrella fija a la estrella pequeña es, por la ley de la Gravitación Universal, $F = G*M*m/(D^2+d^2)$.

Esta fuerza se puede descomponer en dos partes, F_h y F_v, que con F forman un triángulo rectángulo semejante al formado por el de lados d, D y $\sqrt{(D^2+d^2)}$. Los valores de F_h y F_v son proporcionales a los lados horizontal y vertical del triángulo, respectivamente, por tanto $F_h = F*d/\sqrt{(D^2+d^2)}$ y $F_v = F*D/\sqrt{(D^2+d^2)}$.

Las fuerzas verticales van en sentido contrario y se anulan, mientras que las horizontales van en el mismo sentido y se suman: la fuerza que sufre la estrella pequeña es $F_e = 2*F_h = 2*G*M*m/(D^2+d^2)*d/\sqrt{(D^2+d^2)} = 2*G*M*m*d/\sqrt{(D^2+d^2)^3}$.

Si $D>>d$, $D^2+d^2 \approx D^2$ y por tanto $F_e \approx 2*G*M*m*d/D^3$.

Hago $k = 2*G*M*m/D^3$ de modo que $F_e = k*d$. Como la dirección de la fuerza va hacia el punto de equilibrio y su valor es directamente proporcional a d, la distancia a dicho punto, se trata por definición de un movimiento armónico simple.

Segunda parte:

a) Demostrar que el ingeniero tenía razón al descartar la alternativa propuesta por el regente

Voy a calcular la suma de las fuerzas que ejercen las cuatro masas en sentido horizontal, ya que es evidente que en sentido vertical se anulan. Las de las masas superior e inferior eran $2*G*M*m*d/\sqrt{(D^2+d^2)^3}$ hacia la izquierda del croquis. La de la masa izquierda es $G*M*m/(D+d)^2$ también hacia la izquierda y la de la masa derecha es $G*M*m/(D-d)^2$ hacia la derecha.

Si sumo las cuatro fuerzas, tomando como positivo el sentido hacia la derecha, tengo que la fuerza total es $F_t = G*M*m/(D-d)^2 - G*M*m/(D+d)^2 - 2*G*M*m*d/\sqrt{(D^2+d^2)^3}$.

Operando: $F_t = G*M*m*[1/(D-d)^2 - 1/(D+d)^2 - 2*d/\sqrt{(D^2+d^2)^3}] =$

$G*M*m*[((D+d)^2-(D-d)^2)/(D^2-d^2)^2 - 2*d/\sqrt{(D^2+d^2)^3}] =$

$G*M*m*[(D^2+2*d*D+d^2-D^2+2*d*D-d^2)/(D^2-d^2)^2 - 2*d/\sqrt{(D^2+d^2)^3}] =$

$G*M*m*[4*d*D/(D^2-d^2)^2 - 2*d/\sqrt{(D^2+d^2)^3}] =$

$G*M*m*2*d*[2*D/(D^2-d^2)^2 - 1/\sqrt{(D^2+d^2)^3}].$

Si $D>>d$, $D^2+d^2 \approx D^2$ y $D^2-d^2 \approx D^2$, por tanto $F_t \approx 2*G*M*m*d/D^3$.

Ahora la fuerza total va hacia la derecha, alejándose del punto de equilibrio. En este caso no oscilará la masa pequeña alrededor de dicho punto sino que caerá hacia la masa más próxima.

b) Encontrar una combinación de masas de las estrellas fijas en las esquinas del cuadrado que sí resulte en un movimiento armónico simple por parte de la pequeña estrella.

Si doy por hecho que existe una solución, dejo las masas inferior y superior con el valor inicial de M y asigno a las masas derecha e izquierda un nuevo valor M' que será igual a k*M. Calculo las cuatro fuerzas con estas masas:

$F_t = G*k*M*m/(D-d)^2 - G*k*M*m/(D+d)^2 - 2*G*M*m*d/\sqrt{(D^2+d^2)^3}.$

Operando: $F_t = G*M*m*[k/(D-d)^2 - k/(D+d)^2 - 2*d/\sqrt{(D^2+d^2)^3}] =$

$G*M*m*[k*((D+d)^2-(D-d)^2)/(D^2-d^2)^2 - 2*d/\sqrt{(D^2+d^2)^3}] =$

$G*M*m*[k*(D^2+2*d*D+d^2-D^2+2*d*D-d^2)/(D^2-d^2)^2 - 2*d/\sqrt{(D^2+d^2)^3}] =$

$G*M*m*[4*k*d*D/(D^2-d^2)^2 - 2*d/\sqrt{(D^2+d^2)^3}] =$

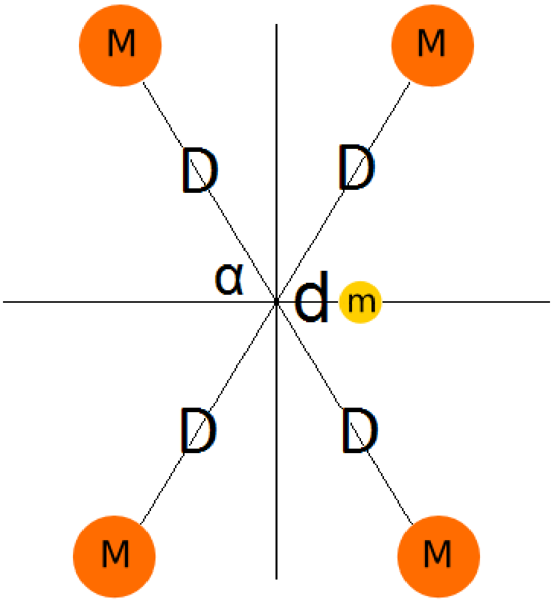
$G*M*m*2*d*[2*k*D/(D^2-d^2)^2 - 1/\sqrt{(D^2+d^2)^3}].$

Si $D>>d$, $D^2+d^2 \approx D^2$ y $D^2-d^2 \approx D^2$, por tanto $F_t \approx 2*G*M*m*d*[2*k/D^3 - 1/D^3] = 2*G*M*m*d*(2*k-1)/D^3.$

Para que el movimiento sea armónico simple, d debe estar multiplicada por una constante negativa, es decir, la fuerza debe ser proporcional a d y estar dirigida hacia el centro. Cualquier valor positivo de k que cumpla $2*k-1<0$ es una solución válida. Por tanto, como k puede tomar cualquier valor entre 0 y $½$, el valor de las masas derecha e izquierda, M', puede tomarse entre 0 y $M/2$.

Tercera parte:

Viendo que el regente no daba muestras de acabar con sus peticiones, el ingeniero decidió generalizar el problema, de modo que pudiera resolver de manera rápida cualquier variación que le propusiera. Para ello planteó el problema de cuatro estrellas de masas iguales formando un rectángulo con el centro en el punto de equilibrio y un eje coincidente con la distancia d, cuyas distancias formasen un ángulo α con dicho eje. Esta estructura tiene la ventaja de que todas las fuerzas verticales se anulan:



La distancia horizontal a las estrellas de la derecha es $D*cos\alpha-d$ y a las estrellas de la izquierda es $D*cos\alpha+d$. La distancia entre la masa m y las estrellas de la derecha es, por el teorema de Pitágoras, $\sqrt{((D*cos\alpha-d)^2+D^2*sen^2\alpha)} = \sqrt{(D^2+d^2-2*d*D*cos\alpha)}$. Asimismo la distancia entre m y las estrellas de la izquierda es $\sqrt{(D^2+d^2+2*d*D*cos\alpha)}$. La fuerza que ejercen las cuatro estrellas en sentido vertical suman cero, pero en horizontal sí se produce una fuerza que voy a calcular.

Aplicando la ley de la Gravitación Universal tengo que la fuerza con la que atrae a la masa m una de las estrellas de la derecha es $F_d = G*M*m/(D^2+d^2-2*d*D*cos\alpha)$. La componente horizontal de dicha fuerza es $F_{dh} = G*M*m/(D^2+d^2-2*d*D*cos\alpha) * (D*cos\alpha-d)/\sqrt{(D^2+d^2-2*d*D*cos\alpha)} = G*M*m*(D*cos\alpha-d)/\sqrt{(D^2+d^2-2*d*D*cos\alpha)}^3$.

La fuerza horizontal con la que atrae a m una de las estrellas de la izquierda es, teniendo en cuenta el signo menos que indica que va hacia la izquierda, $F_{ih} = -G*M*m*(D*cos\alpha+d)/\sqrt{(D^2+d^2+2*d*D*cos\alpha)}^3$.

Si sumo las fuerzas horizontales que ejercen sobre m las cuatro estrella tengo que $F_h = 2*G*M*m*(D*cos\alpha-d)/\sqrt{(D^2+d^2-2*d*D*cos\alpha)}^3-2*G*M*m*(D*cos\alpha+d)/\sqrt{(D^2+d^2+2*d*D*cos\alpha)}^3$.

Opero con la fórmula para llegar a un resultado más manejable. (Es mejor saltar directamente hasta el resultado. En serio):

$F_h =2*G*M*m*[(D*cos\alpha-d)/\sqrt{(D^2+d^2-2*d*D*cos\alpha)}^3-(D*cos\alpha+d)/\sqrt{(D^2+d^2+2*d*D*cos\alpha)}^3]$

$2*G*M*m*[(D*cos\alpha-d)*\sqrt{(D^2+d^2+2*d*D*cos\alpha)}^3-(D*cos\alpha+d)*\sqrt{(D^2+d^2-2*d*D*cos\alpha)}^3]/\sqrt{(D^2+d^2+2*d*D*cos\alpha)}^3/\sqrt{(D^2+d^2-2*d*D*cos\alpha)}^3 =$

$2*G*M*m*[(D*\cos\alpha-d)*\sqrt{(D^2+d^2+2*d*D*\cos\alpha)^3}-(D*\cos\alpha+d)*\sqrt{(D^2+d^2-2*d*D*\cos\alpha)^3}]/\sqrt{((D^2+d^2)^2-4*d^2*D^2*\cos^2\alpha)^3} =$

$2*G*M*m*[D*\cos\alpha*(\sqrt{(D^2+d^2+2*d*D*\cos\alpha)^3}-\sqrt{(D^2+d^2-2*d*D*\cos\alpha)^3})-d*(\sqrt{(D^2+d^2+2*d*D*\cos\alpha)^3}+\sqrt{(D^2+d^2-2*d*D*\cos\alpha)^3})]/\sqrt{((D^2+d^2)^2-4*d^2*D^2*\cos^2\alpha)^3} =$

$2*G*M*m*D*\cos\alpha*(\sqrt{(D^2+d^2+2*d*D*\cos\alpha)^3}-\sqrt{(D^2+d^2-2*d*D*\cos\alpha)^3})/\sqrt{((D^2+d^2)^2-4*d^2*D^2*\cos^2\alpha)^3}$
$-2*G*M*m*d*(\sqrt{(D^2+d^2+2*d*D*\cos\alpha)^3}+\sqrt{(D^2+d^2-2*d*D*\cos\alpha)^3})/\sqrt{((D^2+d^2)^2-4*d^2*D^2*\cos^2\alpha)^3} =$

$2*G*M*m*D*\cos\alpha*((D^2+d^2+2*d*D*\cos\alpha)^3-(D^2+d^2-2*d*D*\cos\alpha)^3)/(\sqrt{(D^2+d^2+2*d*D*\cos\alpha)^3}+\sqrt{(D^2+d^2-2*d*D*\cos\alpha)^3})/\sqrt{((D^2+d^2)^2-4*d^2*D^2*\cos^2\alpha)^3}$
$-2*G*M*m*d*(\sqrt{(D^2+d^2+2*d*D*\cos\alpha)^3}+\sqrt{(D^2+d^2-2*d*D*\cos\alpha)^3})/\sqrt{((D^2+d^2)^2-4*d^2*D^2*\cos^2\alpha)^3} =$

$2*G*M*m*D*\cos\alpha*(12*(D^2+d^2)^2*d*D*\cos\alpha+12*d^3*D^3*\cos^3\alpha)/(\sqrt{(D^2+d^2+2*d*D*\cos\alpha)^3}+\sqrt{(D^2+d^2-2*d*D*\cos\alpha)^3})/\sqrt{((D^2+d^2)^2-4*d^2*D^2*\cos^2\alpha)^3}-2*G*M*m*d*(\sqrt{(D^2+d^2+2*d*D*\cos\alpha)^3}+\sqrt{(D^2+d^2-2*d*D*\cos\alpha)^3})/\sqrt{((D^2+d^2)^2-4*d^2*D^2*\cos^2\alpha)^3}$

Ahora aplico que si $D>>d$, $D^2+d^2 \approx D^2$, $D^2-d^2 \approx D^2$, $D^2+d^2+2*d*D*\cos\alpha \approx D^2$ y $D^2+d^2-2*d*D*\cos\alpha \approx D^2$, por tanto:

$F_h \approx 2*G*M*m*D*\cos\alpha*(12*D^4*d*D*\cos\alpha)/2/D^3/D^6 -2*G*M*m*d*(D^3+D^3)/D^6 = 12*G*M*m*\cos^2\alpha*d/D^3 -4*G*M*m*d*/D^3 = G*M*m*d/D^3*(12*\cos^2\alpha-4).$

De modo que la fuerza total que ejercen las cuatro estrellas sobre la masa *m* es la fuerza horizontal: $F_t = G*M*m*d/D^3*(12*\cos^2\alpha-4).$

A partir de esta fórmula podemos resolver todos los casos. Por ejemplo, el primero, con dos estrellas, es similar a un rectángulo degenerado con solo dos estrellas en los vértices y $\alpha=90°$: $F_t = G*M*m*d/D^3*(12*0-4)/2 = -2*G*M*m*d/D^3$. Se obtiene el mismo resultado, lógicamente. (Se divide entre 2 por haber dos estrellas en el rectángulo degenerado y no cuatro.)

También podemos calcular la influencia de las dos estrellas adicionales del segundo caso asimilándolas a otro rectángulo degenerado con dos estrellas de masa *M’* y $\alpha=0°$: $F_t = G*M'*m*d/D^3*(12*1-4)/2 = 4*G*M'*m*d/D^3$. Si lo sumamos al resultado anterior llegamos a $F_t = G*m*d*(4M'-2M)/D^3$ y para que el resultado sea negativo a que $4M'-2M<0$ y por tanto $M'<M/2$, igual que antes.

a) Si son ocho masas grandes, ¿qué proporciones de valores pueden producir lo que desea el regente, si es que existe alguna manera?

Voy a resolver el caso con ocho estrellas sumando un rectángulo con cuatro estrellas de masa *M’’* y $\alpha=45°$ al caso anterior. Como $\cos^2 45°=1/2$, la fuerza ejercida por las nuevas estrellas es $G*M''*m*d/D^3*(6-4) = 2*G*M''*m*d/D^3$. Si sumo las fuerzas de las ocho estrellas tengo que $F_t = -2*G*M*m*d/D^3+4*G*M'*m*d/D^3+2*G*M''*m*d/D^3 = G*M*m*d/D^3*(-2*M+4*M'+2*M'')$. Para tener un movimiento armónico simple F_t debe ser negativo, luego $-2*M+4*M'+2*M''<0$ o $M>2*M'+M''$. Cualquier combinación de las masas *M, M'* y *M''* que cumpla la desigualdad generará un movimiento armónico simple.

Supongamos que las masas *M'* y *M''* son iguales y valen *k*M*. En ese caso $M>3*k*M$ y por tanto son soluciones válidas los valores de *k* menores que *1/3*, es decir, $M'<M/3$.

b) Si son n masas grandes (y n es un número muy grande), ¿qué proporciones deben tener las masas entonces, si es que es posible producir siempre un movimiento armónico simple?

Para analizar el caso de una guirnalda de estrellas, puedo suponer que tenemos *4*n* estrellas de masa *k*M* formando una circunferencia de radio *D*, siendo *β* el ángulo que forman los radios de dos estrellas consecutivas. Evidentemente $\beta=2*\pi/4/n=\pi/2/n$. Tengo n-1 rectángulos con ángulos *β, 2*β, 3*β, … ,(n-1)*β.*

La suma de todas las fuerzas será $F_t = G*m*d/D^3*(-2*M+4*k*M+(12*\cos^2\beta-4)*k*M+(12*\cos^2(2*\beta)-4)*k*M+(12*\cos^2(3*\beta)-4)*k*M+\ldots+(12*\cos^2((n-1)*\beta)-4)*k*M) =$

$2*G*M*m*d/D^3*(-1+2*k+(6*\cos^2\beta-2)*k+(6*\cos^2(2*\beta)-2)*k+(6*\cos^2(3*\beta)-2)*k+\ldots+(6*\cos^2((n-1)*\beta)-2)*k) =$

$2*G*M*m*d/D^3*(-1-2*k*(n-2)+6*k*(\cos^2\beta+\cos^2(2*\beta)+\cos^2(3*\beta)+\ldots+\cos^2((n-1)*\beta)))$

Por tanto en el círculo de *4*n* estrellas se debe cumplir, para tener un movimiento armónico simple, que $6*k*(\cos^2\beta+\cos^2(2*\beta)+\cos^2(3*\beta)+\ldots+\cos^2((n-1)*\beta))-2*k*(n-2)<1$, con $\beta=\pi/2/n$.

<u>Cuarta parte:</u>

Finalmente, si crees que la última propuesta del regente sigue sin ser lo suficientemente sofisticada, tienes libertad de proponer una estructura de estrellas alternativa, siempre que produzca un movimiento armónico simple y puedas demostrarlo.

A partir de aquí es fácil resolver casos con estrellas de masas diferentes, siempre que se coloquen de a cuatro formando rectángulos como el propuesto.

Supongamos ahora que queremos resolver un caso tridimensional. Lo único que tendríamos que hacer es convertirlo en casos como el estudiado: pares de estrellas situadas en rectas perpendiculares al movimiento de *m,* pares de estrellas en la misma recta del movimiento de *m* y grupos de cuatro estrellas que formen rectángulos como el descrito. Después se suman los efectos que producen los grupos de estrellas y se puede averiguar si el movimiento es armónico simple o no.

Por ejemplo, imaginemos ocho estrellas formando un cubo de lado *L*. La distancia del centro del cubo a un vértice, *D*, vale $L*\sqrt{3}/2$, luego $L=2*D/\sqrt{3}$. Tenemos cuatro estrellas en un mismo plano, así que podemos hacer que *m* tenga un movimiento armónico simple perpendicular a dicho plano. Las otras cuatro estrellas forman un rectángulo con $\alpha=35°15'$, y $cos^2\alpha=2/3$. Aplicando nuestra fórmula maravillosa sabemos que la fuerza horizontal sobre *m* es $F_t = -4*G*M*m*d/D^3 + G*M'*m*d/D^3*(12*cos^2\alpha-4) = -4*G*M*m*d/D^3 + 4*G*M'*m*d/D^3$.

Por tanto, en el caso de un cubo, para obtener un movimiento armónico simple basta con que las cuatro estrellas que están en el plano perpendicular al movimiento de *m* tengan una masa superior a la de las otras cuatro, no importa cual sea la diferencia.

Si analizamos ahora el caso de un octaedro regular, la fuerza es $F_t = -4*G*M*m*d/D^3 + 4*G*M'*m*d/D^3$. Si $M=M'$ entonces $F_t=0$, pues la fuerza de las cuatro estrellas perpendiculares al movimiento iguala la de las dos de su recta. De nuevo llegamos al mismo resultado, en el octaedro regular se obtiene un movimiento armónico simple si las masas del plano perpendicular al movimiento son mayores que las otras dos.

Otras posibilidades, como colocar estrellas a distancias diferentes de *D* se resuelven sustituyendo la nueva *D'* por *D* en la fórmula, siempre con $D'>>d$. Por ejemplo, en un rombo con los vértices a distancias *D* y *D'*, con las cuatro estrellas de masa *M*, la fuerza será $Ft = -2*G*M*m*d/D^3 + 4*G*M*m*d/D'^3 = 2*G*M*m*d*(-1/D^3+2/D'^3)$. En ese caso se debe cumplir que $-1/D^3+2/D'^3<0$, $2/D'^3<1/D^3$, $D'^3>2*D^3$, $D'>\sqrt[3]{2}*D$, luego *D'* debe ser superior a $1,25992*D$ para que se produzca un movimiento armónico simple.

Ya podemos resolver cualquier caso: masas diferentes (siempre que las que estén formando los rectángulos tengan masas iguales), distancias diferentes, casos tridimensionales, todo a la vez... Solo hay que recordar una fórmula, la de las cuatro estrellas que forman un rectángulo:

$$F_t = G*M*m*d/D^3*(12*cos^2\alpha-4).$$