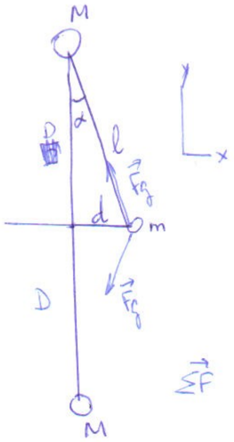
PARTE 1ª



$tg\alpha = \frac{d}{D}$ $\quad sen\alpha = \frac{d}{l}$ $\quad \cos\alpha = \frac{D}{l} \simeq 1$

$d << D \quad d << l \quad D \simeq l$

$$|\vec{F_g}| = G\frac{Mm}{l^2} \simeq G\frac{Mm}{D^2}$$

$$\sum\vec{F} \begin{cases} \sum F_x = -|\vec{F_g}|\,sen\alpha - |\vec{F_g}|\,sen\alpha \\ \sum F_y = |\vec{F_g}|\cos\alpha - |\vec{F_g}|\cos\alpha = 0 \end{cases}$$

$$\sum\vec{F} = \sum\vec{F_x} = -2|\vec{F_g}|\,sen\alpha\,\vec{i} = -\frac{2GMm}{D^2}\frac{d}{D}\vec{i} =$$

$$= -\frac{2GMm}{D^3}d\,\vec{i} = m\vec{a}$$

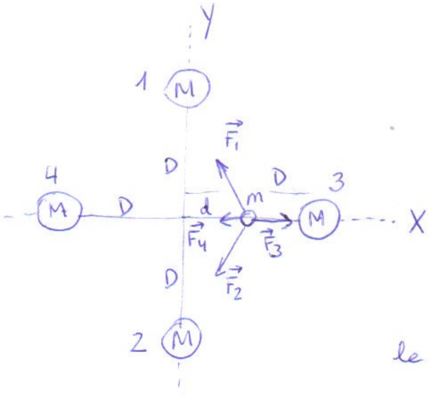
$$\vec{a} = -\frac{2GM}{D^3}\,d\,\vec{i} = -\omega^2 x\,\vec{i} = \vec{a}$$

d es la variable (x) (si es máxima es la AMPLITUD) $\quad$ forma de reconocer un m.v.a.s.

donde $W^2 = \frac{2GM}{D^3}$ $\quad \omega = \sqrt{\frac{2GM}{D^3}}$, luego el movimiento oscilatorio de m (con $d \ll D$) es un m.v.a.s. (c.q.d.) Hemos hecho la aproximación de $\cos\alpha = \frac{D}{l} \simeq 1$ ya que si $d << D$ entonces $l \simeq D$. También, $sen\alpha \simeq \alpha \simeq tg\alpha$ porque $d \ll D$ y entonces $\frac{d}{l} \simeq \frac{d}{D}$

$\alpha \to 0 \quad \lim_{\alpha\to 0}\frac{sen\alpha}{\alpha} = 1 \quad \lim_{\alpha\to 0}\frac{tg\alpha}{\alpha} = 1$

PARTE 2º



Para ver si el movimiento es armónico o no evaluamos si

$$\sum \vec{F} = -K\cdot\vec{d} \quad (\vec{d} \text{ variable en el eje OX})$$

En el dibujo, con la estrella $\underline{m}$ en la parte positiva del eje OX $\vec{d}=+d\vec{i}$

Si $\underline{m}$ estuviera oscilando, cuando estuviera en la parte negativa del eje OX $\vec{d}=-d\vec{i}$. En cualquier caso, la fuerza resultante debe ser $\underline{\text{opuesta}}$ a $\vec{d}$ para que el movimiento sea MUAS.

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3+\vec{F}_4 = (\vec{F}_1+\vec{F}_2) + G\frac{Mm}{(D-d)^2}\vec{i} - \frac{GMm}{(D+d)^2}\vec{i}$$

En la parte 1ª del desafío obtuve para

$$\vec{F}_1+\vec{F}_2 = -\frac{2GMm}{D^3}d\vec{i} \quad (\text{proporcional y opuesta a } \vec{d})$$

$$\sum \vec{F} = -\frac{2GMm}{D^3}d\vec{i} + GMm\left[\frac{D^2+d^2+2Dd-D^2-d^2-2Dd}{(D-d)^2(D+d)^2}\right]\vec{i} =$$

$$= \left(\frac{-2GMm}{D^3}d + \frac{4GMm\,Dd}{(D^2-d^2)^2}\right)\vec{i} \simeq$$

Si $d \ll D$ entonces $\frac{d}{D}\to 0$ y $\frac{d^2}{D^2}\to 0 \Rightarrow d^2 \ll D^2 \quad D^2-d^2 \simeq D^2$

$$\simeq \left(\frac{-2GMm}{D^3}d + \frac{4GMm\,d\,D}{D^{\cancel{4}3}}\right)\vec{i} = \frac{2GMm\,d}{D^3}\vec{i}$$

Esta fuerza neta es proporcional a $\vec{d}$ pero $\underline{\text{no}}$ es opuesta y llevaría a la estrella m hacia la estrella 3 de masa M sin ninguna posibilidad de volver y, por supuesto, de realizar un MUAS. La fuerza neta debería haber sido negativa en puntos a la derecha del eje OX (opuesta a $\vec{d} = +d\vec{i}$), e, igualmente, positiva en puntos a la izquierda del eje OX (opuesta a $\vec{d} = -d\vec{i}$).

Con esto queda demostrado que si las 4 masas son iguales la estrella $\underline{m}$ se "caería" literalmente encima de la estrella de masa M más próxima en la dirección del movimiento.

Es obvio que las combinaciones de masas que pueden producir un MUAS son aquellas que, respetando las masas de las estrellas 1 y 2 (las iniciales) y siendo estas iguales se complementan con masas M_3 y M_4 menores que M para que la fuerza neta sea negativa ($\vec{d} = +d\vec{i}$, $\Sigma\vec{F} = -F\vec{i}$).

Si $M_3 = M_4$ (simetría que haría que fuera indiferente partir de un punto situado en una parte u otra del eje OX) $\frac{-2GMm}{D^3}d + \frac{4GM_3md}{D^3}$ debería ser negativa (<0)

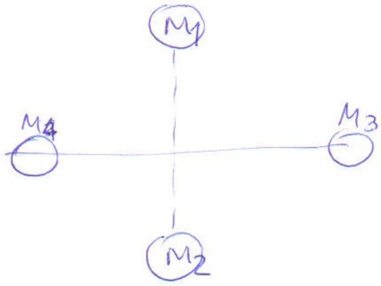
Para ello podemos ver que el valor límite (no sería realmente este ya que hemos hecho alguna aproximación con las distancias) sería $M_3 = \frac{M}{2}$, es decir para estrellas $M_3 = M_4 < \frac{M}{2}$. Por ejemplo, para ~~cubrirnos~~ curarnos en salud

$$M_3 = M_4 = \frac{M}{3} \; ; \; \Sigma\vec{F} = \left(-\frac{2GMm}{D^3}d + \frac{4G\frac{M}{3}md}{D^3} \right)\vec{i} = \frac{-2GMm}{3D^3}d\vec{i}$$

$= -Kd\vec{i}$, que originaría un MUAS c.q.d.

También me he planteado que $M_3 \neq M_4$, pero entonces, en $\sum \vec{F}$ aparecen dependencias con d y d^2 y ya no sería posible $\sum \vec{F} = -K\vec{d}$.

Solución:

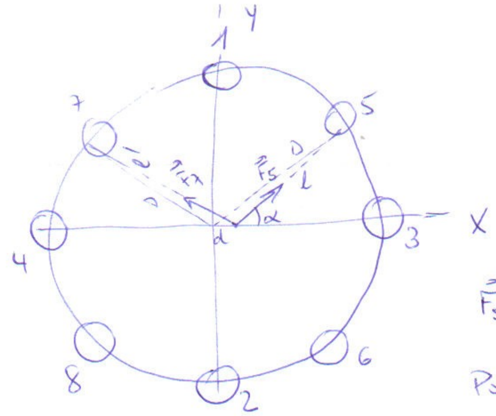


posibles combinaciones

$M_1 = M_2 = M$

$M_3 = M_4 < \frac{M}{2}$

PARTE 3ª



$\sum \vec{F}_y = 0$ $\qquad \alpha \simeq 45°$

$$\vec{F}_{5x} = \frac{GMm}{l^2}\cos 45\,\vec{i} = \frac{GMm}{l^2}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}$$

$$\vec{F}_{5x}+\vec{F}_{6x} = \frac{GMm}{l^2}\sqrt{2}\,\vec{i}$$

Por simetría y como, $d \ll D$,

$$\vec{F}_{7x}+\vec{F}_{8x} = -\frac{\sqrt{2}\,GMm}{l'^2}\vec{i}$$

l^2 (teorema del coseno) $= D^2+d^2-2Dd\cos 45$

$$l'^2 = D^2+d^2-2Dd\cos 135 = D^2+d^2+2Dd\cos 45$$

$$(\vec{F}_{5x}+\vec{F}_{6x})+(\vec{F}_{7x}+\vec{F}_{8x}) = \sqrt{2}\,GMm\left(\frac{\cancel{D^2}+\cancel{d^2}+Dd\sqrt{2}-\cancel{D^2}-\cancel{d^2}+Dd\sqrt{2}}{l^2\,l'^2}\right)\vec{i}$$

$$= \sqrt{2}\,GMm\,\frac{2\sqrt{2}\,Dd}{l^2\,l'^2}\vec{i} \underset{l^2\simeq D^2\ \ l'^2\simeq D^2}{\simeq} \frac{4GMmDd}{D^4}\vec{i} = \frac{4GMm}{D^3}d\,\vec{i}$$

$\vec{F}_3+\vec{F}_4$ (de la parte 2) $= \frac{4GMm}{D^3}d\,\vec{i}$

$\vec{F}_1+\vec{F}_2$ (de la parte 1) $= -\frac{2GMm}{D^3}d\,\vec{i}$

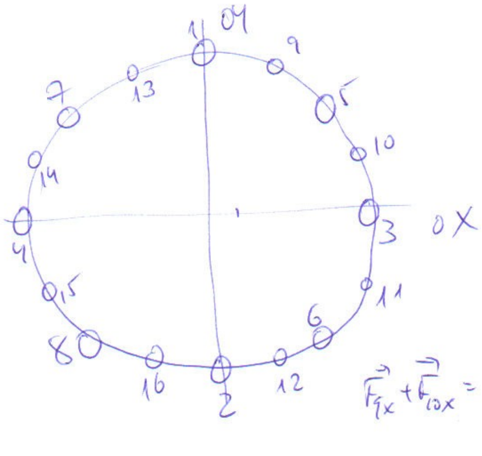
$\sum_{i=1}^{8}\vec{F}_i = \frac{GMm}{D^3}(-2+4+4)\,d\,\vec{i}$. No sería MVAS ya que $\sum\vec{F} \neq -K d\,\vec{i}$ (no sería opuesta la fuerza a $\vec{d}$)

Sería suficiente con reducir las masas de las estrellas 3, 4, 5, 6, 7 y 8 hasta al menos $\frac{M}{4}$ o bien hacer las masas de las estrellas M_1 y $M_2 \geq 4M$ y entonces tendríamos $\sum\vec{F} = -K d\,\vec{i}$

Cada vez que queremos poner más estrellas, simétricamente, estaríamos duplicando el número de ellas, ocupando las nuevas posiciones en la circunferencia equidistante de las anteriores.

Voy a tratar el caso de 16 estrellas ($2^n = 16 = 2^4$) con $n=4$. El caso $n=1$ (parte 1ª) es el primordial para que exista MUAS. El caso $n=2$ (parte 2ª) es también algo particular. El caso $n=3$, con 8 estrellas lo acabamos de ver y voy a intentar encontrar por inducción una relación de la fuerza resultante con las masas de n estrellas para generalizar.

Está claro que al añadir más estrellas cada vez, el doble, la fuerza neta nueva añadida será positiva (en la parte derecha de OX) y habría que reducir la masa de las estrellas (excepto la 1 y la 2, las 2 primeras del eje OY) o bien aumentar la masa de las estrellas 1 y 2 en la proporción adecuada para que $\sum \vec{F}_{total} = -k d \vec{i}$



$\sum \vec{F}_y = 0$ por simetría y con eje OX (9 con 12 y 10 con 11)

Voy a componer $\vec{F}_{9x} + \vec{F}_{10x}$

$$\vec{F}_{9x} = \frac{GMm}{l^2} \cos(45 + \overset{\alpha}{22{,}5})\,\vec{i}$$

$$\vec{F}_{10x} = \frac{GMm}{l'^2} \cos(45 - \overset{\alpha}{22{,}5})\,\vec{i}$$

$$l^2 = l'^2$$

$$\vec{F}_{9x} + \vec{F}_{10x} = \frac{GMm}{l^2}\left(\cos(45+\alpha) + \cos(45-\alpha)\right) = \frac{GMm}{l^2}\sqrt{2}\cos\alpha\,\vec{i}$$

3.2

ya que $\cos(\overbrace{45+\alpha}^{A}) + \cos(\overbrace{45-\alpha}^{B}) = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} = 2\cos 45\cos\alpha =$

$= \sqrt{2}\cos\alpha$.

Por simetría $\vec{F}_{11x} + \vec{F}_{12x} = \vec{F}_{9x} + \vec{F}_{10x}$ $\qquad \alpha = \frac{90}{4}$

$$\vec{F}_{9x} + F_{10x} + F_{11x} + F_{12x} = \frac{GMm}{l^2}\, 2\sqrt{2}\cos\frac{90}{4}\,\vec{i}$$

También por simetría

$$\vec{F}_{13x} + \vec{F}_{14} + \vec{F}_{15x} + \vec{F}_{16x} = -\frac{GMm}{l'^2}\, 2\sqrt{2}\cos\frac{90}{4}\,\vec{i}$$

Voy a aproximar suponiendo que $l \simeq D-d$ y $l' \simeq D+d$

para sacar $\sum_{i=9}^{16}\vec{F}_x = \frac{GMm}{D^2}\, 2\sqrt{2}\cos\frac{90}{4}\left(\frac{\cancel{D^2}+\cancel{d^2}+2Dd-\cancel{D^2}-\cancel{d^2}+2Dd}{l^2\, l'^2}\right)\vec{i}$

$(l^2 \simeq D^2)$
$l'^2 \simeq D^2$

$$\simeq \frac{GMm}{D^2}\, 2\sqrt{2}\cos\frac{90}{4}\left(\frac{4\cancel{D}d}{D^{\cancel{4}}}\right)\vec{i} =$$

$$= \frac{GMm}{D^3}\, 4\cdot 2\cdot\sqrt{2}\cos\frac{90}{4}\, d\,\vec{i}\ .$$

$\frac{4Dd}{D^4} = \frac{4d}{D^3}$ viene de la suma de las fuerzas de la parte izq. con las de la derecha.

$\sqrt{2}\cos\frac{90}{n}$ es una pareja de un lado (simétricas respecto a la bisectriz del 1er cuadrante p.e.). El 2 viene de sumar la 2 parejas (9-10 y 11-12) $2^1 = 2^{4-3} = 2^{n-3}$, con lo que para 16 estrellas ($n=4$, $2^4=16$) $\sum_{i=9}^{16}\vec{F} = 8\sqrt{2}\cos\frac{90}{4}\,\frac{GMm}{D^3}\,d\,\vec{i}$

A medida que vayamos añadiendo estrellas en los huecos (el doble cada vez) saldrá el doble de parejas, de ahí $2^{n-1} = 2^3 = 8 = 2^{4-1}$ y el ángul α de la más próxima a 3 con el eje OX sería $\frac{90}{n}$ (= ángulo entre dos estrellas consecutivas)

$$\sum_{i=1}^{16} \vec{F}_{ix} \simeq \frac{GMm}{D^3}\left(-2+4+4+\underbrace{8\sqrt{2}\cos\frac{90}{4}}_{10,45}\right) d\,\vec{\imath} = \frac{GMm}{D^3} 16{,}45\,d$$

$8\sqrt{2} = 11{,}31$. Para conseguir MUAS con $\sum\vec{F} = -Kd\hat{\imath}$ bastaría con hacer $M_1 = M_2$ igual al menos a casi $9M$ por dar un número entero y no pillarnos.

Si duplicamos el nº estrellas sucesivamente $\frac{90}{n} \to 0$

y $\cos\frac{90}{n} \to 1$

con lo que la fuerza de las últimas estrellas colocadas sería $2^{n-1}\sqrt{2}\cos\frac{90}{n}\frac{GMm}{D^3} d\,\vec{\imath} \xrightarrow[\cos\frac{90}{n}\to 1]{}$

$\to 2^{n-1}\sqrt{2}\frac{GMm}{D^3} d\,\vec{\imath}$ y siempre podríamos aumentar las masas de M_1 y M_2 para que $\sum\vec{F} = -Kd\vec{\imath}$.

También se puede reducir las masas de las demás estrellas.