**Péndulo estelar**

*La civilización de los Nevindivadianos de Aquila era una de las más avanzadas del Universo. Su control sobre el entorno era casi absoluto: podían modificar el clima de sus planetas a voluntad, obtener una cantidad de energía casi inagotable de manera limpia, manipular materia a nivel nanométrico e incluso controlar los movimientos orbitales de sus sistemas estelares.*

*Tal era la maestría y el conocimiento de los Nevindivadianos que, en ocasiones, creaban obras de ingeniería galáctica sin un propósito práctico, sino como una forma de arte. Hordas de turistas visitaban cada año, por ejemplo, el planeta Kuririkuri, rodeado por una docena de estrellas de distintos colores que orbitaban a su alrededor, de modo que sobre Kuririkuri nunca era de noche sino que días de distintos tonos se alternaban cada poco tiempo. Los Nevindivadianos no sólo habían llevado cada estrella hasta ponerla en órbita alrededor del planeta, sino que habían introducido en el núcleo de Kuririkuri una sustancia de tal densidad que las estrellas giraban en torno al planeta y no al revés? además de otra sustancia en la superficie que evitaba que ese campo gravitatorio aplastara a los turistas, pero no quiero alargarme. El caso es que los Nevindivadianos, así llamados por su ancestral profeta, tenían una ciencia y una tecnología extraordinariamente avanzadas.*

*En cierta ocasión, uno de sus regentes electos decidió hacer otra obra de arte cósmica: un péndulo estelar. La idea era crear un sistema de tres estrellas de modo que una de ellas realizase un movimiento oscilante debido a la gravedad de las otras dos. Para ello, los Nevindivadianos emplearían una de sus técnicas casi mágicas: la capacidad de mantener un objeto fijo en el espacio respecto a otro.*

*El proyecto del regente consistía en dejar dos enormes estrellas fijas a una gran distancia una de otra, y luego poner una estrella más pequeña entre las dos. Si la pequeña estrella se dejase libre justo entre las dos estrellas grandes estaría en equilibrio, pero si a continuación se alejase ligeramente de ese punto de equilibrio como se muestra en la figura, la pequeña estrella empezaría a oscilar:*

*Cada estrella grande debe tener una masa M, y la pequeña una masa m. El punto de equilibrio distaría una gran distancia D de cada estrella grande, y la pequeña se separaría una distancia d antes de dejarla libre para oscilar.*

*Naturalmente tú, avezado lector, eres el ingeniero galáctico encargado de poner en funcionamiento este gigantesco péndulo estelar, y aquí tienes la primera parte del desafío:*

*Demuestra que, si d«D, la estrella pequeña realiza un movimiento armónico simple. Tendrás que despreciar algún término en algún momento para poder demostrarlo, y dejo a tu criterio cuándo y cómo hacerlo.*

Lo primero que tenemos que mirar es qué fuerzas actuarán sobre la estrella pequeña. Suponemos que sólo va a moverse por la mediatriz de la línea que une las dos estrellas grandes, y marcaremos como $x=0$ el punto medio. Así, el vector posición entre la estrella pequeña y cada una de las grandes sería $(x, D)$ y $(x, -D)$, respectivamente. La fuerza, actuando solamente con la gravedad, sería entonces

$$f_1 = G\frac{Mm}{|R|^3}R = \frac{GMm(x, D)}{\sqrt{x^2+D^2}^3}$$

para la primera estrella, y

$$f_2 = G\frac{Mm}{|R|^3}R = \frac{GMm(x, -D)}{\sqrt{x^2+D^2}^3}$$

para la segunda. La fuerza total sobre la estrella pequeña sería

$$f = f_1 + f_2 = \frac{GMm(2x, 0)}{\sqrt{x^2+D^2}^3}$$

Es decir, la fuerza tendería a acercar a la estrella al punto $x = 0$ (siempre que estemos en esa línea... si no, ¡una estrella haría más fuerza que la otra y atraería a la estrella pequeña hacia ella!), pero esto no es suficiente para demostrar que tenemos un movimiento armónico simple. Para ello, la fuerza tiene que ser proporcional a $x$, y tenemos que probar que lo será cuando la distancia máxima, $d$, sea mucho menor que $D$. Por tanto desarrollamos en $x = 0$ por Taylor a primer orden la fuerza (que ya no tenemos que considerar un vector, porque sabemos que sólo actúa en una dirección)(aquí es donde despreciamos algún término, los términos en los que aparezca $x^2$, que serán despreciables respecto a $D^2$). Así,

$$f = \frac{\text{2GMmx}}{\sqrt{x^2 + D^2}^3} \approx \frac{(2GMm(\sqrt{0^2 + D^2}^3 - 0)}{\sqrt{x^2 + D^2}^6} x = 2\frac{GMmx}{D^3}$$

Por tanto la fuerza será proporcional a la distancia, y el movimiento será armónico simple. Podemos sacar así cosas como su periodo, que será

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{D^3}{2GM}}$$

Pero ya vamos más allá de lo que se pedía, que era solo demostrar que es un MAS.

*El regente deseaba una estructura más compleja, de modo que propuso al ingeniero una configuración diferente. En vez de dos grandes estrellas fijas habría cuatro, en los vértices de un cuadrado, como se muestra en la figura adjunta.*

*Sin embargo, el ingeniero le explicó que eso era imposible, ya que la pequeña masa no oscilaría armónicamente alrededor del centro como antes. Como alternativa, el ingeniero propuso al regente modificar la masa de las grandes estrellas de modo que las cuatro no tuvieran la misma masa M, sino que algunas tuvieran una masa diferente.*

*La segunda parte del desafío consiste en: a) Demostrar que el ingeniero tenía razón al descartar la alternativa propuesta por el regente b) Encontrar una combinación de masas de las estrellas fijas en las esquinas del cuadrado que sí resulte en un movimiento armónico simple por parte de la pequeña estrella.*

Bueno, bueno, pequeño xuglurz, ¿cómo que no se puede hacer un MAS con cuatro estrellas? Sólo tienes que mirar... desde otra perspectiva. Si la estrella se mueve por el eje perpendicular a las dos líneas que unen las cuatro estrellas, los vectores de posición serían $(x,\ 0,\ D)$, $(x,\ 0,\ -D)$,$(x, D, 0)$, $(x, -D, 0)$. Así, la fuerza total será

$$f = f1 + f2 + f3 + f4 = \frac{GMm(4x, 0, 0)}{\sqrt{x^2 + D^2}^3} \approx \frac{4GMmx}{D^3}$$

por lo que ¡tendremos un movimiento armónico simple! Así que temo que el pobre ingeniero nevindivaniano acabará en el estómago del regente.

Pero vamos a pensar en el problema con el dibujo que tenemos. Para intentar matar dos lutrinos de un tiro, y buscar la respuesta a las dos preguntas de una sola vez, haremos el problema con masas genéricas ($M_1$,$M_2$,$M_3$ y $M_4$). Los vectores de posición serán respectivamente (ahora estamos en dos dimensiones, no como hace un rato - los vectores serán de dos componentes): $(x, D)$,$(x, -D)$,$(x + D, 0)$,$(x - D, 0)$, y las fuerzas por tanto

$$f_1 = \frac{GM_1 m(x, D)}{\sqrt{x^2 + D^2}^3}$$
$$f_2 = \frac{GM_2 m(x, -D)}{\sqrt{x^2 + D^2}^3}$$
$$f_3 = \frac{GM_3 m(x + D, 0)}{|x + D|^3}$$
$$f_4 = \frac{GM_4 m(x - D, 0)}{|x - D|^3}$$

Calculando $f/\mathrm{Gm}$, para quitar factores comunes,

$$\frac{f}{Gm} = \frac{M_1(x,D)}{\sqrt{x^2+D^2}^3} + \frac{M_2(x,-D)}{\sqrt{x^2+D^2}^3} + \frac{M_3(x+D,0)}{|x+D|^3} + \frac{M_4(x-D,0)}{|x-D|^3}$$

Lo primero que vemos es que para que la fuerza sea sólo en la dirección en la que queremos, y que el segundo término del vector fuerza sea 0, $M_1 = M_2$, así que de momento parece que vamos bien. Si calculamos con todas las masas iguales, y eso cumple la última condición, $M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = M$, tenemos que, ya sin vectores,

$$\frac{f}{Gm} = \frac{2Mx}{\sqrt{x^2+D^2}^3} + \frac{M(x+D)}{|x+D|^3} + \frac{M(x-D)}{|x-D|^3}$$

y que, aproximando de nuevo a primer orden por Taylor, nos queda

$$\frac{f}{Gm} \approx -\frac{2Mx}{D^3}$$

El resultado queda similar, pero con un signo menos. Y ese signo menos es crucial. Porque pasamos de un movimiento de atracción al centro, a una repulsión. Por tanto ya no tenemos un MAS.

Si hacemos ahora lo mismo con masas arbitrarias, tenemos que

$$\frac{f}{Gm} \approx \frac{M_3 - M_4}{D^2} + \frac{M_1 + M_2 - 2M_3 - 2M_4}{D^3}x$$

Esto en general queda claro que no es un MAS. Lo primero, tiene un término que no es proporcional a $x$. Así que en primer lugar, $M_3 = M_4$ es necesario para tener un MAS. También como dijimos antes $M_1 = M_2$. Llamemos $M_1 = M_2 = M$ y $M_3 = M_4 = M'$. Así,

$$\frac{f}{Gm} \approx \frac{2M - 4M'}{D^3}x$$

El coeficiente que acompaña a la x tiene que ser positivo, como ya dijimos. Así que tiene que cumplirse la inecuación

$$2M - 4M' > 0$$

o lo que es lo mismo,

$$M > 2M'$$

Cualesquiera masas que cumplan esto nos valen para resolver el problema (y mejor cuanto mayor sea $M$ respecto a $2M'$). Si llamamos $M$ a la masa que tenían antes las estrellas, podemos por ejemplo usar $M_1 = M$, $M_2 = M$, $M_3 = M/3$, $M_4 = M/3$. Siempre iguales las opuestas, y más pequeñas (mucho más pequeñas, menos de la mitad) las que están en la misma línea que el movimiento.

*Cuando el ingeniero recibió un mensaje del regente a la caída de la noche, ya imaginaba lo que se iba a encontrar. El regente apreciaba mucho la elegancia del diseño de cuatro masas grandes, pero ¿no podrían ser ocho? Seguro que el ingeniero podía encontrar una relación de masas que produjese un movimiento armónico como antes, ¿o es que era imposible?*

*La imagen adjunta era justo lo que el ingeniero se temía: ocho masas grandes equidistantes del centro y entre sí, formando una especie de circunferencia. Y lo peor de todo es que al final del mensaje había una postdata:*

*P. S. No hay nada que impida seguir añadiendo grandes estrellas, ¿no? ¿Y si ponemos una miríada de ellas formando una circunferencia? ¿Qué masas deberían tener?*

*De manera que ahí tienes las dos últimas preguntas del desafío: a) Si son ocho masas grandes, ¿qué proporciones de valores pueden producir lo que desea el regente, si es que existe alguna manera? b) Si son n masas grandes (y n es un número muy grande), ¿qué proporciones deben tener las masas entonces, si es que es posible producir siempre un movimiento armónico simple?*

*Finalmente, si crees que la última propuesta del regente sigue sin ser lo suficientemente sofisticada, tienes libertad de proponer una estructura de estrellas alternativa, siempre que produzca un movimiento armónico simple y puedas demostrarlo.*

Vaya, esto se pone difícil... las fuerzas y las leyes de Newton están bien para unas pocas estrellas, pero para tantas se nos va a formar un lío horripilante. Así que mejor buscamos otro método... ¿qué tal los potenciales? http://es.wikipedia.org/wiki/Potencial_gravitatorio

La condición que teníamos antes para tener un MAS era que la fuerza fuera proporcional a la distancia, y fuera de atracción. Esto se puede demostrar (pero no lo voy a hacer aquí... al final del artículo de wikipedia tenéis alguna pista de por dónde ir ;) ) que es equivalente a que el potencial tenga un mínimo en el centro del MAS (en realidad, la condición sería más fuerte: tendría que ser un mínimo que se pueda aproximar por una cuadrática, pero no vamos a discriminar a los movimientos armónicos de orden superior, que también son personas). ¿Y como sabemos que hay un mínimo de potencial? Pues la derivada del potencial tiene que ser cero en ese punto,

$$\left.\frac{dV}{dx}\right|_{x=0} = 0$$

y su derivada segunda tiene que ser positiva (o negativa si lo definiéramos al revés, tendremos que tener cuidado con los signos)

$$\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=0} > 0$$

¿Y qué forma tiene el potencial? Pues si tomamos cada estrella como una masa puntual - y tenemos por ahí otro teorema que nos demuestra que podemos hacerlo siempre que estemos fuera de la estrella - el potencial de una sola estrella tiene la forma

$$V_i = -G\frac{M_i}{\left|\vec{x} - \vec{P_i}\right|}$$

Donde $\vec{x}$ es la posición en el espacio, vector, y $\vec{P_i}$ es la posición de la estrella que crea el potencial, también vector. Y como el potencial es aditivo,

$$V = \sum_i V_i$$

Ahora viene la cosa. En realidad, para que el movimiento sea estable frente a perturbaciones, el mínimo tendría que darse en las tres direcciones del espacio. Como veremos luego, hasta ahora no ha sido así: nuestros bonitos proyectos se habrían deshecho en cuanto hubiéramos puesto a oscilar la masa. Así que las condiciones «de verdad» tendrán que ser

$$V = -G\sum_i \frac{M_i}{\left|\vec{x} - \vec{P_i}\right|}$$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{\vec{x}=0} = 0, \left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{\vec{x}=0} = 0, \left.\frac{\partial V}{\partial z}\right|_{\vec{x}=0} = 0$$

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{\vec{x}=0} > 0, \left.\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right|_{\vec{x}=0} > 0, \left.\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right|_{\vec{x}=0} > 0$$

No parece una mejora, ¿no? Pues ahora veremos que sí, porque podemos llegar a relaciones «más o menos simples» si trabajamos primero de forma analítica. Antes de todo vuelvo a hacer notar que hasta ahora sólo tuvimos en cuenta de la última fila de relaciones (la de las derivadas segundas) la primera, y sin las otras no podemos asegurar que el movimiento sea estable. Pero sigamos con ello.

Primero derivemos el potencial respecto a x:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -G\sum_i M_i \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-P_{ix})^2+(y-P_{iy})^2+(z-P_{iz})^2}}\right) = $$
$$= -G\sum_i M_i \frac{P_{ix}-x}{\left|\vec{x}-\vec{P_i}\right|^3}$$

Y ahora hallemos su segunda derivada:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-G\sum_i M_i \frac{P_{ix}-x}{\left|\vec{x}-\vec{P_i}\right|^3}\right) = -G\sum_i M_i \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{P_{ix}-x}{\left|\vec{x}-\vec{P_i}\right|^3}\right) = $$
$$= -G\sum_i M_i \frac{3\cdot(x-P_{ix})^2 - \left|\vec{x}-\vec{P_i}\right|^2}{\left|\vec{x}-\vec{P_i}\right|^5}$$

(Esta última me ha costado, ya me estoy haciendo viejo con esto de derivar... espero que esté correcta o se nos va todo al traste)

Podemos hacer análogamente con las derivadas respecto a $y$ y $z$ y nos dará resultados similares.

Ahora sustituimos en $\vec{x}=0$ (y con eso quiero decir $x=0$, $y=0$ y $z=0$)

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{\vec{x}=0} = -G\sum_i M_i \frac{P_{ix}}{\left|\vec{P_i}\right|^3}$$
$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{\vec{x}=0} = -G\sum_i M_i \frac{3\cdot(P_{ix})^2 - \left|\vec{P_i}\right|^2}{\left|\vec{P_i}\right|^5}$$

Y con las relaciones que sacamos antes,

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{\vec{x}=0} = 0 \Rightarrow \sum_i M_i \frac{P_{ix}}{\left|\vec{P_i}\right|^3} = 0$$
$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{\vec{x}=0} > 0 \Rightarrow \sum_i M_i \frac{3\cdot(P_{ix})^2 - \left|\vec{P_i}\right|^2}{\left|\vec{P_i}\right|^5} < 0$$

Ojo con ese último menor que: no es una errata, es que hemos multiplicado por menos uno, al quitar $-G$, y eso nos cambia el sentido de la desigualdad. También habría que añadir las correspondientes a $y$ y a $z$.

Y ya está. Con esas condiciones podemos saber en cualquier momento si tenemos un MAS o no.

Pero atentos, ¡hay más! Si tenemos las estrellas dispuestas en un círculo, como antes, todos los $\vec{P_i}$ tienen el mismo módulo, $D$. Así que podemos simplificar las fórmulas y nos quedan

$$\sum_i M_i \frac{P_{ix}}{D^3} = 0 \Rightarrow \sum_i M_i P_{ix} = 0$$
$$\sum_i M_i \frac{3\cdot(P_{ix})^2 - D^2}{D^5} < 0 \Rightarrow \sum_i M_i (P_{ix})^2 < \frac{1}{3}\sum_i M_i D^2$$

(Con las correspondientes $y$ y $z$, claro). Si las aplicamos a los primeros casos tendríamos:

1. $P_{ix}$ y $P_{iz}$ valen 0 para las dos estrellas, así que la primera condición se cumple inmediatamente para $x$ y $z$. $P_{1y} = -P_{2y} = D$ y $M_1 = M_2$, y por tanto también se cumple la otra parte de la primera condición. ¡Premio! Vamos a la segunda. En la dirección $x$ (o $z$), 0 va a ser menor que la parte derecha de la desigualdad (que por cierto valdrá $\frac{2}{3}MD^2$), y por tanto ya sabemos que tenemos un MAS. Pero para $y$,

$$\sum_i M_i(P_{ix})^2 = MD^2 + M(-D)^2 = 2MD > \frac{2}{3}MD^2$$

Lo cual quiere decir que sí, tenemos un MAS, pero en cuanto nuestra estrella oscilante se acerque un poquito a cualquiera de las fijas más que a la otra, dejaremos de estar en nuestro caso bonito.

2. Las propiedades de las estrellas son:

   1. $M_1, P_1 = (D, 0, 0)$
   2. $M_2, P_2 = (-D, 0, 0)$
   3. $M_3, P_3 = (0, D, 0)$
   4. $M_4, P_4 = (0, -D, 0)$

   (Creo que no las llamé antes en ese orden, pero bueno, me entienden). Las relaciones que tenemos ahora son:

$$\sum_i M_i P_{ix} = M_1 D - M_2 D = 0 \tag{1}$$
$$\sum_i M_i P_{iy} = M_3 D - M_4 D = 0 \tag{2}$$
$$\sum_i M_i P_{iz} = 0 \tag{3}$$
$$\frac{1}{3}\sum_i M_i D^2 = \frac{D^2}{3}(M_1 + M_2 + M_3 + M_4) \tag{4}$$
$$\sum_i M_i(P_{ix})^2 = M_1 D^2 + M_2 D^2 \tag{5}$$
$$\sum_i M_i(P_{iy})^2 = M_3 D^2 + M_4 D^2 \tag{6}$$
$$\sum_i M_i(P_{iz})^2 = 0 \tag{7}$$

   La primera para cumplirse nos obliga a que $M_1 = M_2$, y la segunda a que $M_3 = M_4$. La tercera y la séptima se cumplen automáticamente (lo que nos permite dar la solución «tramposa» que di antes, con la dirección de oscilación cambiada). Nos quedan la quinta y la sexta, que renombrando $M_1 = M_2 = M$ y $M_3 = M_4 = M'$ nos dan

$$2MD^2 > \frac{D^2}{3}(2M + 2M') \Rightarrow \frac{4}{3}M > \frac{2}{3}M' \Rightarrow 2M > M'$$
$$2M'D^2 > \frac{D^2}{3}(2M + 2M') \Rightarrow \frac{4}{3}M' > \frac{2}{3}M \Rightarrow 2M' > M$$

   Queda claro que las dos no se pueden cumplir a la vez de ninguna manera. ¿Entonces qué hicimos antes? Pues simplemente dejamos que se cumpliera la primera, y por tanto tuvimos un MAS en el eje $x$, pero eso a la vez nos hacía que el movimiento fuera inestable en el eje $y$... De momento, ¡parece que no hemos dado ni una!

Para el nuevo caso - Madre mía, llevo un montón escrito y aún no me metí en el nuevo caso, el regente va a comerme aunque sea sólo por la tardanza - tenemos un caso similar, pero como ahora tenemos muchas estrellas es mejor que la fórmula venga dada de una manera más bonita. La posición de la estrella $i$ viene, con un poco de trigonometría básica, dada por

$$P_i = D(\cos(45^o \cdot (i-1)), \operatorname{sen}(45^o \cdot (i-1)), 0)$$

Y si hacemos los cálculos llegamos a estas relaciones:

$$\begin{aligned} M_1 + \frac{M_2}{\sqrt{2}} - \frac{M_4}{\sqrt{2}} - M_5 - \frac{M_6}{\sqrt{2}} + \frac{M_8}{\sqrt{2}} &= 0 \\ \frac{M_2}{\sqrt{2}} + M_3 + \frac{M_4}{\sqrt{2}} - \frac{M_6}{\sqrt{2}} - M_7 - \frac{M_8}{\sqrt{2}} &= 0 \\ M_1 + \frac{M_2}{2} + \frac{M_4}{2} + M_5 + \frac{M_6}{2} + \frac{M_8}{2} &< \frac{1}{3}\sum_i M_i \\ \frac{M_2}{2} + M_3 + \frac{M_4}{2} + \frac{M_6}{2} + M_7 + \frac{M_8}{2} &< \frac{1}{3}\sum_i M_i \end{aligned}$$

La cuestión es, ¿con tan pocas ecuaciones podemos obtener una solución? Pues es cuestión de probar y tener un poco de intuición matemática. Por ejemplo podemos buscar un poco de simetría y hacer $M_1 = M_5 = M$, $M_3 = M_7 = M'$ y $M_2 = M_4 = M_6 = M_8 = M''$. Con esto las dos primeras ecuaciones se nos satisfacen automáticamente, sean cuales sean los valores de las masas. Las últimas dos ecuaciones nos quedan:

$$\begin{aligned} 2M + 2M'' &< \frac{1}{3}(2M + 2M' + 4M'') \\ 2M + M'' &< M' \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} 2M' + 2M'' &< \frac{1}{3}(2M + 2M' + 4M'') \\ 2M' + M'' &< M \end{aligned}$$

Vaya, otra vez difícil cumplir ambas... de hecho, y que alguien me corrija si no es así (porque no lo he demostrado), parece que imposible. Pues bueno, tomemos valores para la primera... y que la segunda falle como siempre :) Por ejemplo, $M = 1$, $M' = 4$ y $M'' = 1$. La primera se cumple, y por tanto tendremos un MAS... pero la segunda falla por mucho (9 no es ni mucho menos menor que 1) y por tanto será ampliamente inestable el dicho MAS. Pero qué le vamos a hacer, hasta ahora no lo hemos logrado.

¿Y que pasa con el caso de «muchas» estrellas? Pues tenemos muchas formas de aproximarnos al problema. Podríamos hacer como hemos hecho hasta ahora, y hacer un sumatorio de muchas estrellas. ¿Problema? Tendríamos ecuaciones de muchisimos términos (más o menos tantos como estrellas). O podemos probar una integral. Si suponemos que hay tantas estrellas que la masa de cada estrella es despreciable respecto a la suma de las demás, podemos aproximar el problema diciendo que hay una densidad lineal de masa formando un círculo. ¿Cómo quedará esto? Pues veamos. Primero, cada estrella ya no vendrá indicada por un número, sino por un ángulo (el ángulo que forma con el movimiento de la estrella oscilante), y habrá estrellas en el intervalo $(0, 2\pi)$ - en radianes porque es más cómodo para integrar. Y la posición de cada una vendrá dada por:

$$P(\alpha) = D(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha, 0)$$

Y la masa (en realidad, densidad angular de masa) de cada una:

$$m(\alpha)$$

Las condiciones nos quedarían (es un proceso de paso al límite, no tengo claro al cien por cien de que sea legítimo, pero no voy a rehacer todos los pasos anteriores)

$$\int_0^{2\pi} m(\alpha)P_x(\alpha)d\alpha = 0$$
$$\int_0^{2\pi} m(\alpha)(P_x(\alpha))^2 d\alpha < \frac{D^2}{3}\int_0^{2\pi} m(\alpha)d\alpha$$

Podemos suponer que la masa total de todo el anillo es uno, es decir, normalizarlo; al fin y al cabo, esto es elegir las unidades correctamente. por la tanto la tercera de las integrales se nos vuelve uno (porque precisamente esa es la definición). Y sustituyendo en las fórmulas la definición de $P$:

$$\int_0^{2\pi} m(\alpha)\cos\alpha d\alpha = 0$$
$$\int_0^{2\pi} m(\alpha)\mathrm{sen}\alpha d\alpha = 0$$
$$\int_0^{2\pi} m(\alpha)\cos^2\alpha d\alpha < \frac{1}{3}$$
$$\int_0^{2\pi} m(\alpha)\mathrm{sen}^2\alpha d\alpha < \frac{1}{3}$$

Vaya, y ¿qué hacemos con esto? Pues son ecuaciones muy difíciles de resolver, pero jugueteando se pueden hallar algunas soluciones. Por ejemplo, probemos con la mas sencilla. Supongamos $m(\alpha) = \frac{1}{2\pi}$, es decir, densidad constante. Sabemos que nos puede valer porque su integral entre 0 y $2\pi$ es 1

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} = 1$$

También se cumplen las dos primeras condiciones:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\alpha}{2\pi} d\alpha = 0$$
$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{sen}\alpha}{2\pi} d\alpha = 0$$

¡Parece que vamos bien! Nos quedan las dos últimas. Necesitamos al menos que una se cumpla, para tener un MAS inestable, pero mejor que se cumplan ambas. Vamos a ver:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\alpha}{2\pi} d\alpha = \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$$

Vaya, esta no nos sale. ¿La segunda?

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{sen}^2\alpha}{2\pi} d\alpha = \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$$

Lástima. ¿Probamos con otra? Miremos a ver $m(\alpha) = \frac{\mathrm{sen}^2\alpha}{\pi}$ - la idea me la ha dado esta última ecuación. Vemos que la masa va bien,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{sen}^2\alpha d\alpha}{\pi} = 1$$

Las dos primeras condiciones también,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{sen}^2\alpha\cos\alpha}{\pi} d\alpha = 0$$
$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{sen}^3\alpha}{\pi} d\alpha = 0$$

Y las últimas dos...

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\alpha \operatorname{sen}^2\alpha}{\pi} d\alpha = \frac{1}{4} < \frac{1}{3}$$
$$\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}^4\alpha}{\pi} d\alpha = \frac{3}{4} > \frac{1}{3}$$

Bueno, una de dos. Ya sabemos que esto quiere decir que sí, tenemos un MAS... pero no tenemos un MAS «estable». Probablemente sea imposible tener un MAS estable, pero no sé cómo demostrarlo. Tal vez podríamos tener uno si usáramos masas negativas (que en una civilización tan avanzada deben venderlas en el super) en la disposición de 8 estrellas que calculamos antes. Si recordamos, las fórmulas eran (añado también la del eje $z$):

$$2M + M'' < M'$$
$$2M' + M'' < M$$
$$0 < M + M' + 2M''$$

Es decir, para que sea estable en el eje z, necesitamos que haya más masa positiva que negativa. Pero si hacemos esto... las otras dos ecuaciones tampoco se pueden resolver. ¡Vaya! Ni con masas negativas. Empiezo a pensar que esto no se puede lograr de ninguna manera... Si lo estabilizamos por un lado lo desestabilizamos por el otro.

Probemos otra disposición, esta vez en tres dimensiones, para ver si algo cambia. Imaginemos que tenemos seis estrellas, colocadas en los vértices de un octaedro. Sus posiciones serían

$$P_1 = (D, 0, 0)$$
$$P_2 = (-D, 0, 0)$$
$$P_3 = (0, D, 0)$$
$$P_4 = (0, -D, 0)$$
$$P_5 = (0, 0, D)$$
$$P_6 = (0, 0, -D)$$

Podemos usar en parte las fórmulas de la circunferencia, porque sigue cumpliéndose que la distancia de todas las estrellas al centro es la misma ($D$). Así,

$$\sum_i M_i P_{ix} = 0$$
$$\sum_i M_i (P_{ix})^2 < \frac{D^2}{3} \sum_i M_i$$

Con las equivalentes en los otros ejes. Calculemos pues:

$$M_1 D - M_2 D = 0$$
$$M_3 D - M_4 D = 0$$
$$M_5 D - M_6 D = 0$$
$$M_1 D^2 + M_2 D^2 < \frac{D^2}{3} \sum_i M_i$$
$$M_3 D^2 + M_4 D^2 < \frac{D^2}{3} \sum_i M_i$$
$$M_5 D^2 + M_6 D^2 < \frac{D^2}{3} \sum_i M_i$$

Las tres primeras ecuaciones son claras: $M_1 = M_2 = M_a$, $M_3 = M_4 = M_b$ y $M_5 = M_6 = M_c$. Esto hace que las otras queden:

$$\begin{aligned} 2M_a < \frac{2}{3}(M_a + M_b + M_c) \Rightarrow M_a < \frac{1}{2}(M_b + M_c) \\ 2M_b < \frac{2}{3}(M_a + M_b + M_c) \Rightarrow M_b < \frac{1}{2}(M_a + M_c) \\ 2M_c < \frac{2}{3}(M_a + M_b + M_c) \Rightarrow M_c < \frac{1}{2}(M_a + M_b) \end{aligned}$$

Vaya, como antes, son incompatibles. Si por ejemplo hacemos todas igual a uno, se cumplirían las ecuaciones, pero no las inecuaciones, así que ni MAS, ni estabilidad. Bueno, hagamos $M_c = 2$ y las demás iguales a uno. Las dos primeras ecuaciones se cumplen, pero la tercera no. Bueno, es igual que al principio. Tenemos dos direcciones en las que el MAS es estable, y una en la que no.

No sé si alguien podrá sacar una demostración de que no se puede tener un MAS estable en los tres ejes, yo no puedo. Pero la intuición me dice que es imposible tener un mínimo de potencial en una región del espacio (salvo que en el centro, claro, haya una masa, lo que no nos serviría para hacer un MAS). Por tanto creo que es imposible que nuestro pobre ingeniero cumpla lo que prometió al regente, y, temo, terminará siendo cena.

Me encantan los finales felices.

P.S. - Se me ha ocurrido una demostración de esto, y resulta que es muy simple. Si recordamos la condición de la segunda derivada, era

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{\vec{x}=0} = -G \sum_i M_i \frac{3 \cdot (P_{ix})^2 - \left|\vec{P}_i\right|^2}{\left|\vec{P}_i\right|^5}$$

Y análogo para las demás. Si sumamos las tres condiciones para $x$, $y$, y $z$ nos da

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \\ = -G \sum_i \left( M_i \frac{3 \cdot (P_{ix})^2 - \left|\vec{P}_i\right|^2}{\left|\vec{P}_i\right|^5} + M_i \frac{3 \cdot (P_{iy})^2 - \left|\vec{P}_i\right|^2}{\left|\vec{P}_i\right|^5} + M_i \frac{3 \cdot (P_{iz})^2 - \left|\vec{P}_i\right|^2}{\left|\vec{P}_i\right|^5} \right) = \\ = -G \sum_i M_i \frac{3(P_{ix}^2 + P_{iy}^2 + P_{iz}^2) - 3\left|\vec{P}_i\right|^2}{\left|\vec{P}_i\right|^5} = \\ = -G \sum_i M_i \frac{3\left|\vec{P}_i\right|^2 - 3\left|\vec{P}_i\right|^2}{\left|\vec{P}_i\right|^5} = 0 \end{aligned}$$

Es decir, la suma de las tres derivadas segundas es igual a cero. Y para que tres números sumen cero, es imposible que los tres sean mayores que cero, por lo que las condiciones

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{\vec{x}=0} > 0, \left.\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right|_{\vec{x}=0} > 0, \left.\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right|_{\vec{x}=0} > 0$$

no se pueden cumplir las tres a la vez.

En realidad hay una forma «aún más general» de demostrar esto. La ecuación del campo gravitatorio es

$$\nabla \vec{g} = -4\pi G \rho$$

con $\vec{g} = -\nabla V$ el campo gravitatorio, y $\rho$ la densidad de masa. Por tanto

$$\nabla \vec{g} = -\nabla^2 V = -4\pi G \rho$$

Si estamos en una zona del espacio sin masas (como tiene que ser para que nuestra estrella pueda moverse),

$$\nabla^2 V = 0$$

Pero ¿qué es ese $\nabla^2$? Pues es el llamado operador laplaciano, que en coordenadas cartesianas tiene esta forma:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Por tanto llegamos de una forma general al mismo resultado,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Luego realmente el pobre ingeniero tiene un problema.