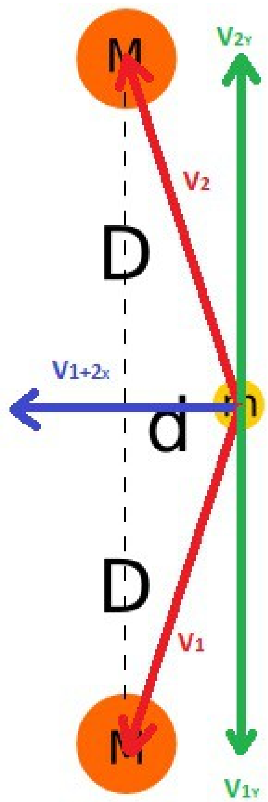
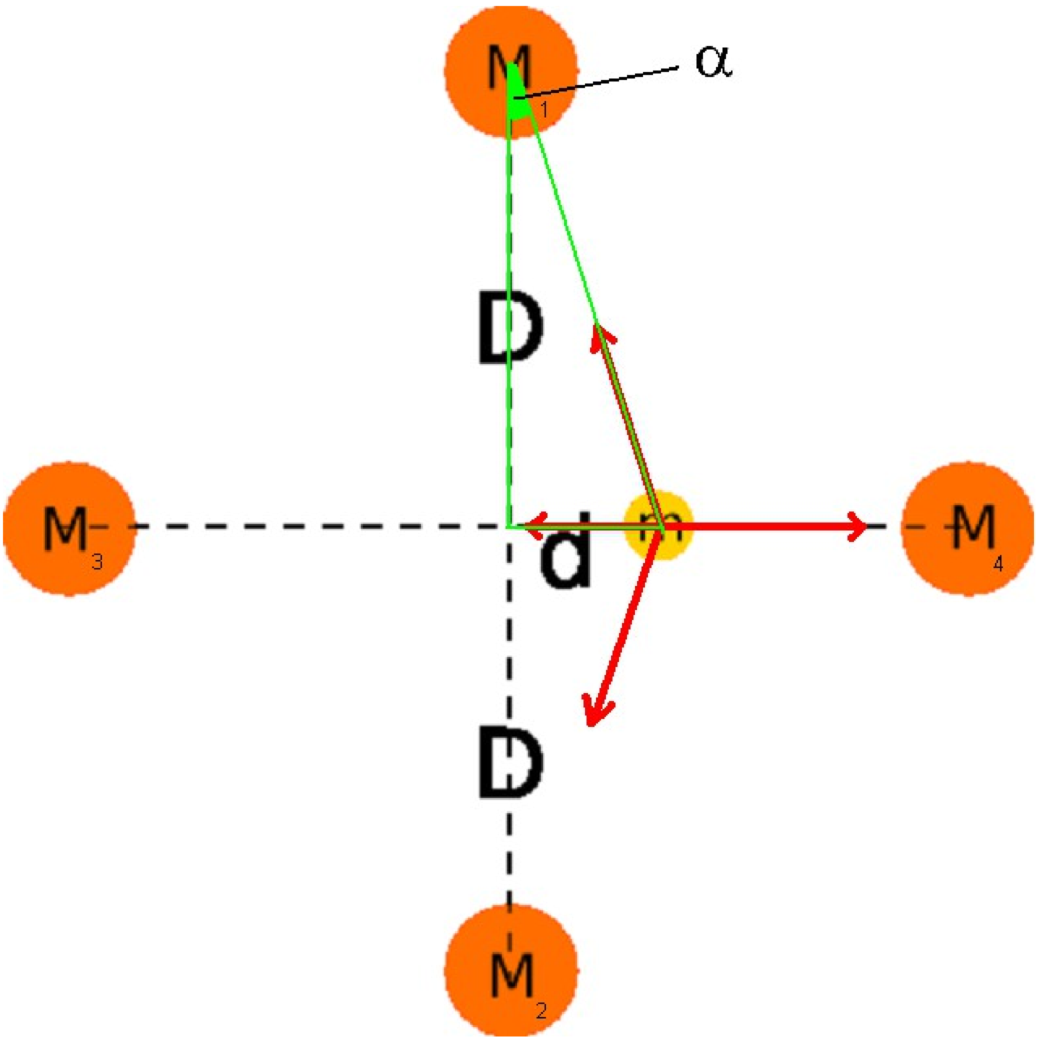
PRIMERA PARTE

La estrella pequeña m, al estar en el punto de equilibrio entre las dos grandes M, es atraído por las dos con una fuerza representada por sendos vectores V1 y V2. Al expresar cada vector como resultado de la suma de dos vectores inscritos en las coordenadas X e Y, podemos observar que ambos vectores V1y y V2y se anulan, dejando a V1+2x como única fuerza actuando sobre m.
A partir de aquí no sé demasiado bien cómo demostrar que estamos ante un péndulo con movimiento armónico simple, pero si asumimos que al empezar y antes de llegar a la intersección los ángulos entre V2 y V2y y V1 y V1y van haciéndose más pequeños a medida que m se acerca a la intersección, los senos de dichos ángulos también van a disminuir hasta que llegados a la intersección los senos son igual a cero. A partir de aquí, m se dirige hacia el otro lado pero con deceleración, ya que al invertirse los ángulos, los senos también se invierten, con lo que el vector V1+2x sería negativo y cada vez mayor a medida que m se aleja de la intersección. Cuando la velocidad de m sea igual a 0 será cuando V1+2x tome su mayor valor, y vuelta a empezar. Movimiento armónico simple de libro.



SEGUNDA PARTE

Para el siguiente problema numeraremos por cuestiones prácticas las estrellas grandes del 1 al 4. Tenemos que M4 es la estrella que más cerca está de m y que, por tanto, será la que mayor fuerza tractora ejerza sobre m. Por tanto, para saber si, una vez dejemos libre a m, iniciará un movimiento armónico simple, debemos averiguar quién puede más en el instante inicial, si FM4 o la suma de FM1+FM2+FM3.



Tomando como estandarte el 'Antes simplista que incomprensible', y para facilitar la propia resolución del problema, usaré un método empírico, es decir, cambiaré algunas letras por valores verosímiles pero ajustados a las exigencias del problema.
Digamos que D=50 y d=5, por ejemplo. Así, tenemos que la fuerza ejercida por M4 es:

$$\vec{F_{M_4}} = G\frac{M_4 m}{45^2} = G\frac{M_4 m}{2025}$$

Según trabajaba en el problema he visto que es mucho más fácil visualmente si creamos una variable nueva:

$$z = GM_n m$$

Entonces, la fuerza ejercida por M3 es:

$$\vec{F_{M_3}} = \frac{z}{55^2} = \frac{z}{3025}$$

Si dividimos las fuerzas, el resultado es el esperado: el vector producido por M4 es mayor que el producido por M3.

$$\frac{\vec{F_{M_4}}}{\vec{F_{M_3}}} = \frac{\frac{z}{2025}}{\frac{z}{3025}} = \frac{3025}{2025} \approx 1,49$$

Ahora bien, ¿qué ocurre si sumamos al vector de M3 los vectores resultantes de M1 y M2?
No sé si era del todo necesario, pero he acudido a Pitágoras para que me dijera la distancia exacta de M1 a m:

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$a^2 = 50^2 + 5^2 \rightarrow a = 50,249$$

Por tanto, tenemos que el vector de fuerza de M1 (y por tanto, el de M2) es:

$$\vec{F_{M_1}} = \vec{F_{M_2}} = \frac{z}{50,249^2} = \frac{z}{2525}$$

Pero como hemos de despreciar los vectores Y, como en la anterior demostración, habremos de saber exactamente lo que mide el vector X. Por tanto, volviendo a Pitágoras:

$$\sin(\alpha) = \frac{5}{50} \rightarrow \alpha = \arcsin\frac{5}{50} = 5,739^{\text{o}}$$

y ya tenemos el ángulo que buscábamos, con lo que, para obtener el valor del vector de M1 y M2, tenemos que hacer lo siguiente:

$$\vec{F_{M_{1_x}}} = \vec{F_{M_{2_x}}} = \left(\frac{z}{2525}\right)\sin 5,739^{\text{o}} = \frac{z}{25250}$$

Ahora tenemos que preguntarnos si FM4 es mayor que la suma de los otros tres vectores, por tanto:

$$\vec{F_{M_{1_x}}} + \vec{F_{M_{2_x}}} + \vec{F_{M_3}} = \frac{z}{3025} + \frac{2z}{25250} = \frac{z}{2440,3}$$

$$\frac{\vec{F_{M_4}}}{\vec{F_{M_{1_x}}} + \vec{F_{M_{2_x}}} + \vec{F_{M_3}}} = \frac{\frac{z}{2025}}{\frac{z}{2440,3}} = \frac{2440,3}{2025} = 1,21$$

El vector resultante de M4 ejerce más fuerza sobre m que el resultado de las otras tres estrellas, por tanto, llevará irremediablemente a m hacia sí provocando un cataclismo galáctico de proporciones inauditas...

Y con esto demostramos que con la misma masa en las cuatro estrellas, el sistema siempre se colapsará si m no está justo en el centro.

Ahora, para encontrar una configuración de masas adecuada para el movimiento armónico simple, parece obvio que:

-M3 y M4 han de pesar lo mismo.

-M1 y M2 también han de pesar lo mismo, pero más de lo que pesan ahora, para que, entre los tres, 'ganen' a M4 (y a M3, cuando el MAS se haya iniciado y esté en el otro lado).
Repitiendo todos los pasos anteriores con las masas de M1 y M2 multiplicadas, por ejemplo, por 2,5:

$$\vec{F_{M_1}} = \frac{2,5z}{50,249^2} = \frac{z}{1010}; \vec{F_{M_{1x}}} = \left(\frac{z}{1010}\right) \sin 5,739^{\text{o}} = \frac{z}{10100}$$

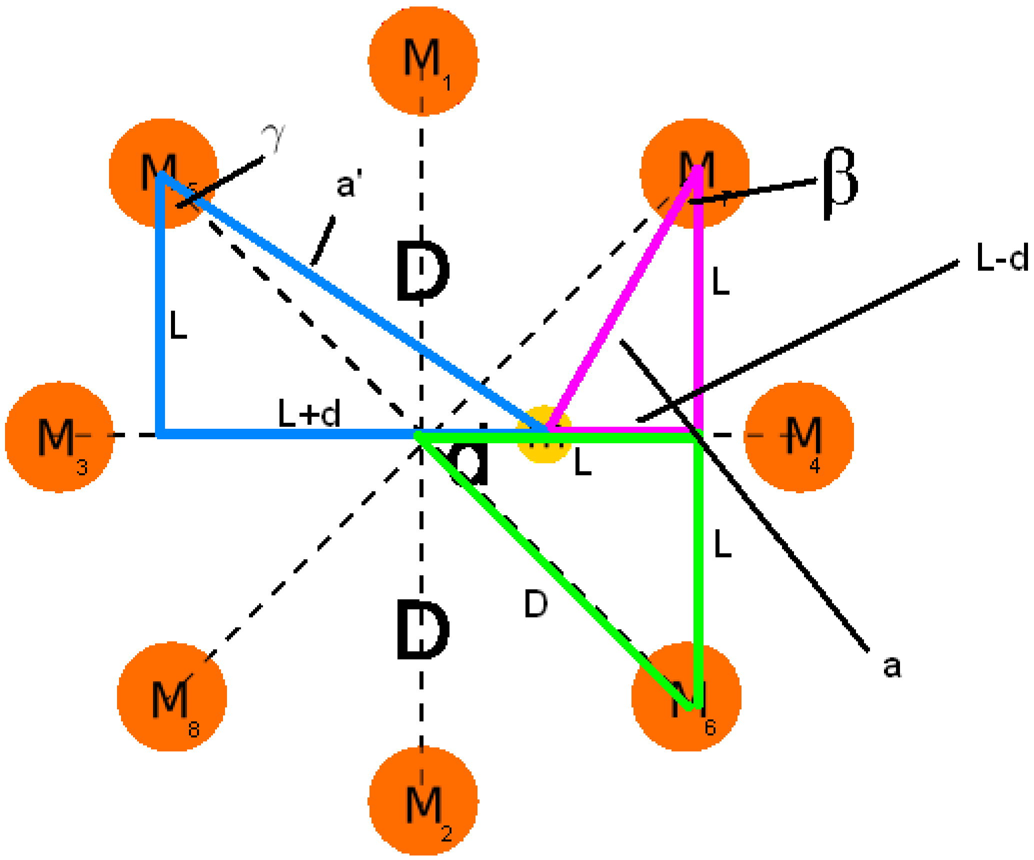
$$\vec{F_{M_{1x}}} + \vec{F_{M_{2x}}} + \vec{F_{M_3}} = \frac{2z}{10100} + \frac{z}{3025} = \frac{z}{1951,61}$$

$$\frac{\vec{F_{M_4}}}{\vec{F_{M_{1x}}} + \vec{F_{M_{2x}}} + \vec{F_{M_3}}} = \frac{\frac{z}{2025}}{\frac{z}{1951,61}} = \frac{1951,61}{2025} = 0,964 < 1$$

Por tanto, el vector suma de M1, M2 y M3 es mayor que el vector de M4 para M1 y M2 = 2,5 M, con lo cual el movimiento armónico simple puede dar comienzo.

TERCERA PARTE

Para este último caso con 8 estrellas parece que deberemos aplicar el mismo razonamiento que cuando teníamos 4, es decir, que numerando las estrellas del 1 al 8 tenemos que, dada la posición actual de m, hay 3 estrellas que claramente, 'tiran' con más fuerza que las otras 5, dada su posición ventajosa.



De todas formas, hagamos los cálculos, para estar seguros:

$$\frac{\vec{F_4} + \vec{F_6} + \vec{F_7}}{\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \vec{F_5} + \vec{F_8}} > 1?$$

Así, podemos tener 3 resultados posibles:

-si el cociente es mayor que 1, el sistema se colapsará,
-si el cociente es igual a 1, tendremos un sistema equilibrado
-si, por contra, es menor que 1, tendremos el ansiado MAS

Para D=50 y d=5, el resultado es el siguiente:
-para determinar la distancia exacta de M7 (y, por tanto, de M6) a m acudimos momentáneamente a la trigonometría:

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2} \rightarrow a = \sqrt{1250 + 921,45} = 46,6$$

$$\sin(\beta) = \frac{L - d}{a} \rightarrow \beta = \arcsin(\frac{L - d}{a}) = 37,381^o$$

Y ahora podemos averiguar el vector resultante de M4, M6 y M7, ayudándonos de los cálculos anteriores:

$$\vec{F_{M_4}} + \vec{F_{M_6}} + \vec{F_{M_7}} = \frac{z}{2025} + 2\left(\frac{z}{2171,45}\sin 37,381^o\right) = \frac{z}{949,67}$$

Seguidamente calculamos el vector resultante de las atracciones de los otros planetas, no sin antes averiguar la distancia exacta de M5 a m, la misma que de M8 a m:

$$a' = \sqrt{L^2 + (L + d)^2} = \sqrt{1250 + 1628,55} = 53,65$$

$$\sin(\gamma) = \frac{L + d}{a'} \rightarrow \gamma = \arcsin\frac{L + d}{'a} = 48,78^o$$

$$\vec{F_{M_1}} + \vec{F_{M_2}} + \vec{F_{M_3}} + \vec{F_{M_5}} + \vec{F_{M_8}} =$$

$$= \frac{z}{2440,3} + \left(2\frac{z}{2878,55}\right)\sin 48,78^o = \frac{z}{1072,5}$$

Calculamos el cociente:

$$\frac{\vec{F_{M_4}} + \vec{F_{M_6}} + \vec{F_{M_7}}}{\vec{F_{M_1}} + \vec{F_{M_2}} + \vec{F_{M_3}} + \vec{F_{M_5}} + \vec{F_{M_8}}} = \frac{\frac{z}{949,67}}{\frac{z}{1072,5}} = \frac{1072,5}{949,67} = 1,13$$

y podemos ver nuevamente que el sistema se colapsaría, absorbiendo M4 a la pequeña m, para disgusto del regente (y de los Presupuestos Generales del Imperio).

De manera que, tomando como guía el modelo anterior con cuatro estrellas grandes, parece obvio que si modificamos M1 y M2 hasta que el cociente efectuado anteriormente sea inferior a 1, podremos habilitar el movimiento armónico simple.

Servidor ha probado con M1 y M2 = 2M, y el sistema se colapsaba. Con M1=2,5 M seguía colapsando, pero entonces se encendió la bombilla, y resolví la segunda parte sin quererlo.

Para M1 y M2=4,5M los resultados son los siguientes:

$$\vec{F_{M_1}} = \frac{4,5z}{2525} = \frac{z}{561,11} \rightarrow \vec{F_{M_{1x}}} = \vec{F_{M_1}} \sin 5,739^{\text{o}} = \frac{z}{5611,11}$$

$$\vec{F_{M_1}} + \vec{F_{M_2}} + \vec{F_{M_3}} + \vec{F_{M_5}} + \vec{F_{M_8}} =$$

$$= \frac{2z}{5611,11} + \frac{z}{3025} + \frac{2z}{3826,92} = \dots = \frac{z}{826,69}$$

$$\frac{\vec{F_{M_4}} + \vec{F_{M_6}} + \vec{F_{M_7}}}{\vec{F_{M_1}} + \vec{F_{M_2}} + \vec{F_{M_3}} + \vec{F_{M_5}} + \vec{F_{M_8}}} = \frac{\frac{z}{949,67}}{\frac{z}{826,69}} = \frac{826,69}{949,67} = 0,87$$

Como vemos, el cociente es menor que 1, con lo que el regente tendrá su capricho funcionando una vez más. Pero, ¿cómo asegurarnos de que los excéntricos deseos de nuestro regente no terminarán con todo el Universo?

Simplemente, si se le ocurre pedir más estrellas, 100 estrellas, 10.000... En definitiva, n estrellas, lo único que deberemos hacer es aumentar el peso de M1 y M2 tal que así:

$$M_1 = M_2 = \frac{n+1}{2}M$$

Posiblemente haya una configuración general más eficiente, pero ésta es producto de comparar los dos experimentos y de comparar los resultados. Si vamos atrás en el documento podemos observar que el cociente con la configuración de 8 estrellas es menor que el de 4, y nada parece indicar que tal circunstancia vaya a cambiar con una configuración de 16 estrellas. Si el cociente hubiera sido mayor, esta afirmación no sería válida, ya que no habría manera de saber si, a medida que n creciera, el cociente superaría la unidad, en cuyo caso el sistema volvería a colapsarse.

Estoy empezando a volverme loco con tanta estrella y tanto vector y no me siento con fuerzas para calcular más cosas (demasiado tiempo sin echar cuentas), pero parece obvio que si, una vez realizadas las modificaciones necesarias para que exista MAS en el modelo con 8 estrellas, acercamos o alejamos M5, M6, M7 y M8 exactamente a la misma distancia unos de otros del centro, el MAS seguiría produciéndose, pero ya no estoy nada seguro de esto...