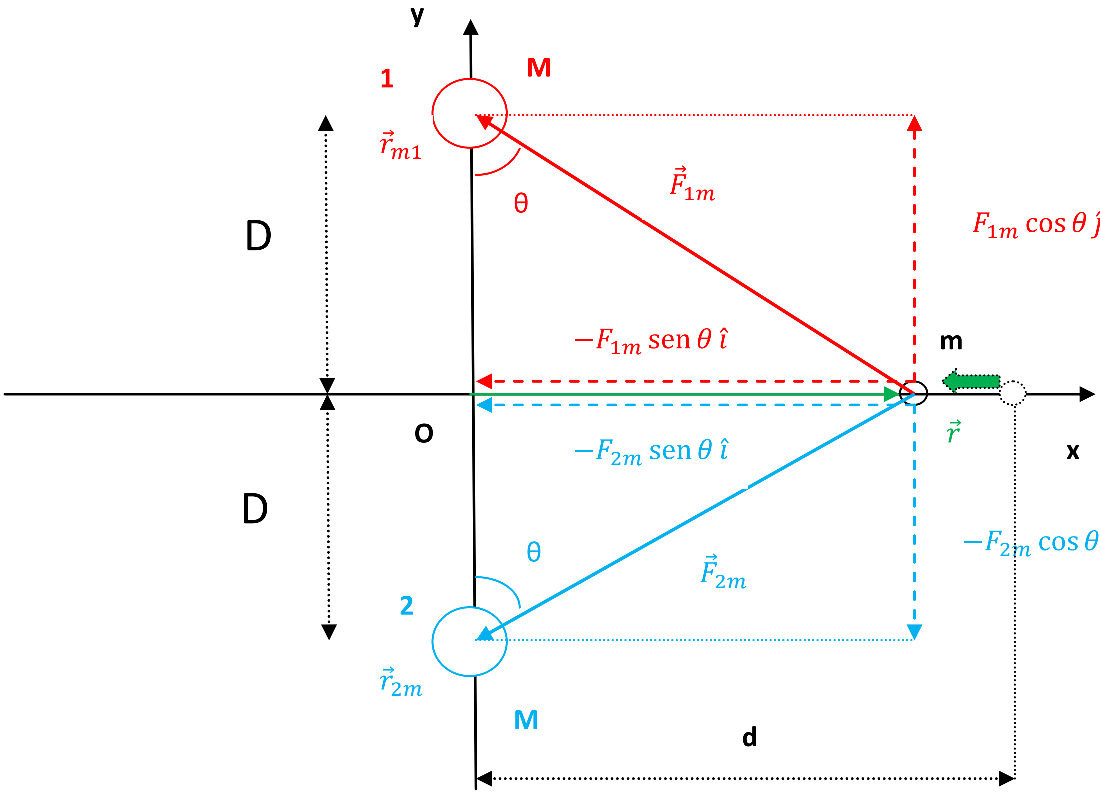
Situación en el momento $t > 0$ *(en t = 0 la masa m estaba "sujeta" en $\vec{r} = d\hat{\imath}$; desde allí la "soltamos" en $t = 0$, de manera que comienza su movimiento hacia la izquierda con velocidad inicial $v_o = 0$)*:



Por simetría los ángulos entre el eje Y y cada vector $\vec{r}_{m1}$y $\vec{r}_{2m}$ son iguales (θ) y los módulos de $\vec{r}_{m1}$ y $\vec{r}_{2m}$ son iguales entre sí:

$$r_{m1} = r_{m2} = r_m = \sqrt{r^2 + D^2}$$

La fuerza total resultante sobre m es:

$$\vec{F} = m\vec{a} = \vec{F}_{1m} + \vec{F}_{2m} = (-F_{1m}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\imath} + F_{1m}\cos\theta\,\hat{\jmath}) + (-F_{2m}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\imath} - F_{2m}\cos\theta\,\hat{\jmath})$$
$$= (-F_{1m}\,\mathrm{sen}\,\theta - F_{2m}\,\mathrm{sen}\,\theta)\hat{\imath} + (F_{1m}\cos\theta - F_{2m}\cos\theta)\hat{\jmath}$$

Además las masas situadas en 1 y 2 son iguales, luego los módulos de $\vec{F}_{1m}$ y $\vec{F}_{2m}$ son también iguales:

$$F_{1m} = F_{2m} = F_m = G\frac{Mm}{r^2 + D^2}$$

Resulta que:

$$\vec{F} = m\vec{a} = -2G\frac{Mm}{r^2 + D^2}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\imath}$$

Como $r \ll D$:

$$\sin\theta = \frac{r}{\sqrt{D^2 + r^2}} \approx \frac{r}{D}$$

y

$$\sin\theta \approx \theta$$

Por tanto podemos poner:

$$r \approx D\theta$$

Y

$$r_m^2 = r^2 + D^2 \approx D^2(1 + \theta^2)$$

Luego queda:

$$F \approx -2G\frac{Mm}{D^2(1+\theta^2)}\theta$$

Además:

$$a = \frac{d^2r}{dt^2} \approx D\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Por lo que:

$$-2G\frac{M}{D^2(1+\theta^2)}\theta = D\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2GM}{D^3}\frac{\theta}{(1+\theta^2)} = 0$$

Llamando:

$$A = \frac{2GM}{D^3}$$

Tenemos:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + A\frac{\theta}{(1+\theta^2)} = 0$$

Como $\theta^2 \ll 1$ (ya que el orden de magnitudes lo permite: por ejemplo, haciendo $d = distancia\ media\ Tierra - Luna$ y $D = distancia\ media\ Tierra - Sol$, resulta que $\theta_{máx} = arcsen\frac{d}{\sqrt{D^2+d^2}} = 2{,}57 \cdot 10^{-3}\ radianes$), podemos considerar:

$$\boldsymbol{\frac{d^2\theta}{dt^2} + A\theta = 0}$$

Que es la ecuación diferencial, correspondiente a un m.a.s., que hay que resolver.

De aquí:

$$\theta(t) \approx C \cdot cos\left(\sqrt{A}t + \varphi\right)$$

$$r(t) \approx D \cdot C \cdot \ cos\left(\sqrt{A}t + \varphi\right)$$

$$v(t) \approx -D \cdot C \cdot \sqrt{A} \cdot \ sen\left(\sqrt{A}t + \varphi\right)$$

Las condiciones iniciales son:

$$r(t = 0) = d = D \cdot C \cdot \ cos(\varphi)$$

$$v(t = 0) = 0 = -D \cdot C \cdot \sqrt{A} \cdot \ sen(\varphi)$$

Luego:

$$C = \frac{d}{D}$$

Y

$$\varphi = k \cdot \pi \ (k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots)$$

Eligiendo $k = 0$, queda:

$$\boldsymbol{\vec{r}(t) \approx d \cdot \ cos\left(\sqrt{\frac{2GM}{D^3}} t\right) \cdot \hat{\imath}}$$

$$\boldsymbol{\theta(t) \approx \frac{d}{D} \ cos\left(\sqrt{\frac{2GM}{D^3}} t\right)}$$

Luego el **período** es:

$$\boldsymbol{T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2GM}{D^3}}} = \sqrt{\frac{2D^3}{GM}} \pi}$$

La **velocidad** será:

$$\boldsymbol{\vec{v}(t) \approx -d \sqrt{\frac{2GM}{D^3}} sen\left(\sqrt{\frac{2GM}{D^3}} t\right) \cdot \hat{\imath}}$$

Y la **aceleración**:

$$\boldsymbol{\vec{a}(t) \approx -d \frac{2GM}{D^3} cos\left(\sqrt{\frac{2GM}{D^3}} t\right) \cdot \hat{\imath}}$$

Excursión 1 - ¿Qué pasaría …

…si utilizamos:

$$d = 384\,400\,000\, m\ (distancia\ media\ Tierra - Luna)$$

$$D = 149\,600\,000\,000\, m\ (distancia\ media\ Tierra - Sol)$$

$$M = 1.9891 \cdot 10^{30} kg\ (masa\ del\ Sol)$$

$$G = 6.67384\ \cdot\ 10^{-11}\,\mathrm{N} \cdot \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2}\quad ?$$

Obtenemos:

$$\boldsymbol{T = 258,25\ días}$$

$\vec{r}(t) = 3.844 \cdot 10^8 \cdot cos(2.816 \cdot 10^{-7} \cdot \mathrm{t}) \cdot \hat{\imath}$	$r_{máx} = 3.844 \cdot 10^8\ m$	$t = \frac{k}{2}T; k = 0, 1, 2 \ldots$ $(t = 129.12\ días, t = 258.25\ días)$
$\theta(t) = 2.57 \cdot 10^{-3} \cdot cos(2.816 \cdot 10^{-7} \cdot \mathrm{t})$	$\theta_{máx} = 2.57 \cdot 10^{-3}\ radianes$	
$\vec{v}(t) = -108.247 \cdot sen(2.816 \cdot 10^{-7} \cdot \mathrm{t}) \cdot \hat{\imath}$	$v_{máx} = 108.247\ m \cdot s^{-1}$	$t = \frac{(2k+1)k}{4}T; k = 0, 1, 2 \ldots$ $(t = 64.56\ días, t = 193.7\ días)$
$\vec{a}(t) = -3.048 \cdot 10^{-5} \cdot cos(2.816 \cdot 10^{-7} \cdot \mathrm{t}) \cdot \hat{\imath}$	$a_{máx} = 3.048 \cdot 10^{-5}\ m \cdot s^{-2}$	$t = \frac{k}{2}T; k = 0, 1, 2 \ldots$ $(t = 129.12\ días, t = 258.25\ días)$

Excursión 2 – Y ¿si no simplificamos?

La ecuación diferencial que define el movimiento, sin despreciar ningún elemento, quedaría de esta manera:

$$F = -2G\frac{Mm}{r_{mM}^2}\sin\theta = ma$$

$$r_{mM}^2 = D^2 + r^2$$

$$r = D \cdot tg\theta$$

$$r_{mM}^2 = D^2(1 + tg^2\theta) = D^2\frac{1}{cos^2\theta}$$

$$F = -2G\frac{Mm}{D^2}\sin\theta\, cos^2\theta$$

$$\frac{dr}{dt} = D\frac{1}{cos^2\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = D\left(2\frac{tg\theta}{cos^2\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{cos^2\theta}\frac{d^2\theta}{dt^2}\right) = \frac{D}{cos^2\theta}\left(2\sin\theta\frac{d\theta}{dt} + \frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$$

$$-2G\frac{M}{D^2}\sin\theta\, cos^4\theta = D\left(2\sin\theta\frac{d\theta}{dt} + \frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$$

$$\boldsymbol{\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\sin\theta\frac{d\theta}{dt} + 2G\frac{M}{D^3}\sin\theta\, cos^4\theta = 0}$$

Mi amigo Wolfram dice que no sabe resolver esta ecuación diferencial, así que lo más sensato parece ser simplificar como hemos hecho arriba.