

El centro de masas (c.d.m) de las 3 estrellas situadas más a la derecha será:

$$\begin{aligned} c. d. m &= \frac{1}{3M} \left[ MD \left( \cos \frac{\pi}{4} \cdot \hat{i} + \sin \frac{\pi}{4} \cdot \hat{j} \right) + MD \cdot \hat{i} + MD \left( \cos \frac{\pi}{4} \cdot \hat{i} - \sin \frac{\pi}{4} \cdot \hat{j} \right) \right] \\ &= \frac{D}{3} \left( 2 \cos \frac{\pi}{4} + 1 \right) \cdot \hat{i} = 0.805 D \end{aligned}$$

Así que podemos suponer que en ese lugar y en  $-\frac{D}{3} \left( 2 \cos \frac{\pi}{4} + 1 \right) \cdot \hat{i}$  hay sendas estrellas cada una de masa  $3M$ .

Según el resultado del segundo desafío, la fuerza resultante de esas 2 estrellas "virtuales" sobre  $m$  será:

$$4GMm \frac{\frac{D}{3} \left( 2 \cos \frac{\pi}{4} + 1 \right)}{\left[ \left( \frac{D}{3} \left( 2 \cos \frac{\pi}{4} + 1 \right) \right)^2 - r^2 \right]^2} \vec{r}$$

Y la fuerza total será:

$$\vec{F}_T = 2GMm \left\{ 2 \frac{\frac{D}{3} \left( 2 \cos \frac{\pi}{4} + 1 \right)}{\left[ \left( \frac{D}{3} \left( 2 \cos \frac{\pi}{4} + 1 \right) \right)^2 - r^2 \right]^2} - \frac{1}{D^3} \right\} \vec{r}$$

**Necesitamos que:**

$$\frac{M'}{M} > \frac{\frac{2D^4}{3} \left( 2 \cos \frac{\pi}{4} + 1 \right)}{\left[ \frac{D^2}{3^2} \left( 2 \cos \frac{\pi}{4} + 1 \right)^2 - d^2 \right]^2} = \frac{1.609D^4}{(0.648D^2 - d^2)^2} \approx 2.483$$

**Para que haya m.a.s.**

Por otro lado, si hubiera  $N$  (par) masas en lugar de 8, a la derecha del eje  $Y$  tendríamos  $\frac{N-2}{2}$  y el círculo estaría dividido en sectores de  $\frac{2\pi}{N}$  radianes.

El c.d.m. de la derecha sería:

$$\begin{aligned} c. d. m &= \frac{2D}{(N-2)} \sum_{k=-\frac{N-4}{4}}^{\frac{N-4}{4}} \left[ \cos \left( k \frac{2\pi}{N} \right) \cdot \hat{i} + \sin \left( k \frac{2\pi}{N} \right) \cdot \hat{j} \right] = \frac{2D}{(N-2)} \sum_{k=-\frac{N-4}{4}}^{\frac{N-4}{4}} \cos \left( \frac{2k\pi}{N} \right) \cdot \hat{i} \\ &= \frac{2D}{(N-2)} \frac{\text{sen} \left( \frac{N-2}{2N} \pi \right)}{\text{sen} \left( \frac{\pi}{N} \right)} \cdot \hat{i} \end{aligned}$$

Donde habría una estrella "virtual" de masa  $\frac{(N-2)}{2}M$ ; y lo mismo a la izquierda. En este caso la fuerza total será:

$$\vec{F}_T \approx 2GMm \left\{ \frac{\frac{4D}{(N-2)} \frac{\text{sen}\left(\frac{N-2}{2N}\pi\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{N}\right)} - \frac{1}{D^3}}{\left[ \frac{4D^2}{(N-2)^2} \left[ \frac{\text{sen}\left(\frac{N-2}{2N}\pi\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{N}\right)} \right]^2 - r^2 \right]^2} \right\} \vec{r}$$

Para que haya m.a.s. debe ser:

$$\frac{M'}{M} > \frac{\frac{4D^4}{(N-2)} \frac{\text{sen}\left(\frac{N-2}{2N}\pi\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{N}\right)}}{\left[ \frac{4D^2}{(N-2)^2} \left[ \frac{\text{sen}\left(\frac{N-2}{2N}\pi\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{N}\right)} \right]^2 - d^2 \right]^2}$$

Si N es muy grande:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} c.d.m &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2D}{N-2} \frac{\text{sen}\left(\frac{N-2}{2N}\pi\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{N}\right)} \cdot \hat{i} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2D}{N-2} \frac{1}{\frac{\pi}{N}} = \frac{2D}{\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{N-2} = \frac{2D}{\pi} \\ &= 0.637 D \end{aligned}$$

La fuerza total es:

$$\vec{F}_T = 2GMm \left[ \frac{\frac{4D}{\pi}}{\left(\frac{4D^2}{\pi^2} - r^2\right)^2} - \frac{1}{D^3} \right] \cdot \vec{r} = 2GMm \left[ \frac{4D\pi^3}{(4D^2 - \pi^2 r^2)^2} - \frac{1}{D^3} \right] \cdot \vec{r}$$

Para que haya m.a.s.:

$$\frac{M'}{M} > \frac{4D^4\pi^3}{(4D^2 - \pi^2 d^2)^2} \approx \frac{\pi^3}{4} = 7.752$$

Posibles variaciones (dibujo sólo en el primer cuadrante para abreviar)

