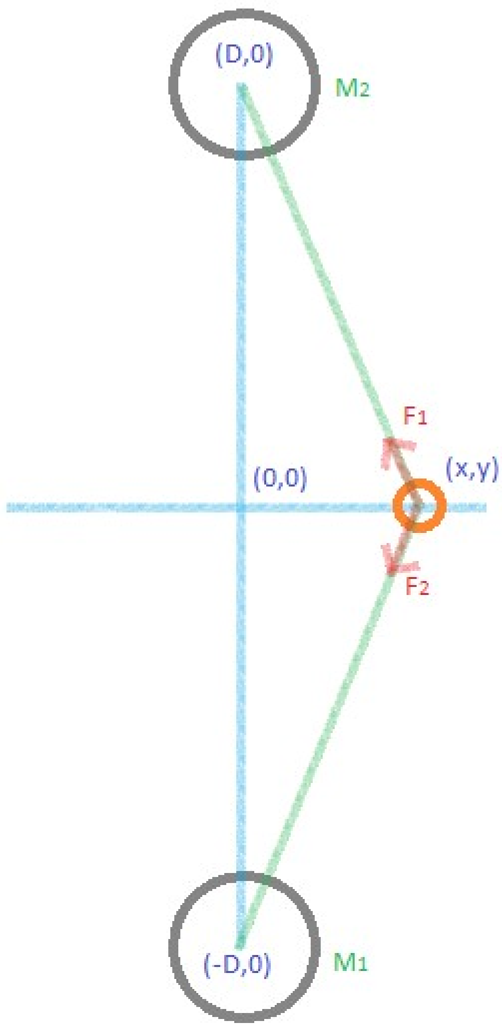
Problema 1

Las fuerzas que se ejercen sobre la estrella de masa m serían

$$F_1 = \frac{G\,M_1\,m}{D_1^2}\,,\, F_2 = \frac{G\,M_2\,m}{D_2^2}$$

Podemos establecer las coordenadas de las estrellas en un plano cartesiano para simplificar el problema.



La distancia de la estrella pequeña a las otras 2 estrellas sería:

$$D_1 = \sqrt{(-D-y)^2 + x^2}$$

$$D_2 = \sqrt{(D-y)^2 + x^2}$$

Con la distancia, podemos establecer la fuerza que ejercerán ambas estrellas.

$$F_1 = \frac{G\,M_1\,m}{(-D-y)^2 + x^2}\,,\; F_2 = \frac{G\,M_2\,m}{(-D-y)^2 + x^2}$$

Pero es más simple descomponer estas fuerzas en una fuerza paralela al eje y otra paralela al eje X, en este caso, utilizando simetría de triángulos.

$$F_y = \frac{(-D-y)\,F_1}{D_1} + \frac{(D-y)\,F_2}{D_2}\,,\; F_x = \frac{-x\,F_1}{D_1} + \frac{-x\,F_2}{D_2}$$

Pero, tenemos que recordar que la estrella pequeña siempre se encuentra sobre el eje x, por lo que:

$$y = 0$$

Entonces podemos simplificar las distancias y las fuerzas:

$$D_1 = D_2 = \sqrt{D^2 + x^2}$$

$$F_1 = \frac{G\,M_1\,m}{D^2 + x^2}\,,\; F_2 = \frac{G\,M_2\,m}{D^2 + x^2}$$

Y si recordamos que las masas de las estrellas grandes son iguales, podemos simplificar aún más las ecuaciones de la fuerza que ejerce cada estrella:

$$M_1 = M_2 = M$$

$$F_1 = F_2 = \frac{GMm}{D^2 + x^2}$$

Si reemplazamos estos nuevos valores, en las ecuaciones de la fuerza descompuesta tenemos que:

$$F_y = \frac{-D\,\frac{GMm}{D^2 + x^2}}{\sqrt{D^2 + x^2}} + \frac{D\,\frac{GMm}{D^2 + x^2}}{\sqrt{D^2 + x^2}} = 0$$

Es decir, no se ejerce ninguna fuerza en el eje y, solo en el eje x, la cual sería:

$$F_x = \frac{-x\frac{GMm}{D^2+x^2}}{\sqrt{D^2+x^2}} + \frac{-x\frac{GMm}{D^2+x^2}}{\sqrt{D^2+x^2}} = -2\mathrm{x}\frac{GMm}{\left(D^2+x^2\right)^{3/2}}$$

Pero esto no se parece en nada a un movimiento armónico simple. Sin embargo si recordamos que el cuerpo oscila de –d a d y que D es mucho mayor a d, tenemos que:

$$-d < x < d \quad \text{y} \quad d \ll D$$

Por lo que el cuadrado de x, siempre será menor al cuadrado d, el cual es a su vez menor al cuadrado de D:

$$x^2 < d^2 ; d^2 \ll D^2$$

O dicho de otra forma:

$$x^2 \ll D^2$$

Siendo así, podemos despreciar el cuadrado de x en la suma, porque será demasiado pequeño como para que afecte en algo

$$D^2 + x^2 \approx D^2$$

De esta forma, la ecuación de la fuerza sería:

$$F_x \approx -\frac{2\mathrm{GMmx}}{D^3} = -kx$$

Donde:

$$k = \frac{2\mathrm{GMmx}}{D^3}$$

De tal forma que el cuerpo describiría un movimiento armónico simple alrededor del centro de masas de ambas estrellas.

Problema 2

Las fuerzas que se ejercen sobre la estrella de masa m serían

$$F_1=\frac{G\,M_1\,m}{D_1^2}\,,\,F_2=\frac{G\,M_2\,m}{D_2^2}\,,\,F_3=\frac{GM_3\,m}{D_1^2}\,,\,F_4=\frac{GM_4\,m}{D_2^2}$$

La distancia de la estrella pequeña a las otras 4 estrellas sería:

$$D_1=\sqrt{(-D-y)^2+x^2}$$

$$D_2=\sqrt{(D-y)^2+x^2}$$

$$D_3=\sqrt{y^2+(-D-x)^2}$$

$$D_4=\sqrt{y^2+(D-x)^2}$$

Con la distancia, podemos establecer la fuerza que ejercerán ambas estrellas.

$$F_1=\frac{G\,M_1\,m}{(-D-y)^2+x^2}\,,\,F_2=\frac{G\,M_2\,m}{(D-y)^2+x^2}\,,\,F_3=\frac{G\,M_3\,m}{y^2+(-D-x)^2}\,,\,F_4=\frac{G\,M_4\,m}{y^2+(D-x)^2}$$

Pero es más simple descomponer estas fuerzas en una fuerza paralela al eje "y" otra paralela al eje "X", utilizando simetría de triángulos.

$$F_y=\frac{(-D-y)F_1}{D_1}+\frac{(D-y)F_2}{D_2}+\frac{-y\,F_3}{D_3}+\frac{-y\,F_4}{D_4}\,,\,F_x=\frac{-x\,F_1}{D_1}+\frac{-x\,F_2}{D_2}+\frac{(-D-x)F_3}{D_3}+\frac{(D-x)F_4}{D_4}$$

Y si recordamos que las masas de las estrellas grandes opuestas son iguales, podemos simplificar aún las ecuaciones de la fuerza que ejerce cada estrella:

$$M_1=M_2=M_a$$

$$M_3=M_4=M_b$$

$$F_1=\frac{G\,M_a\,m}{(-D-y)^2+x^2}\,,\,F_2=\frac{G\,M_a\,m}{(D-y)^2+x^2}\,,\,F_3=\frac{G\,M_b\,m}{y^2+(-D-x)^2}\,,\,F_4=\frac{G\,M_b\,m}{y^2+(D-x)^2}$$

Si remplazamos estos nuevos valores, en las ecuaciones de la fuerza descompuesta tenemos que:

$$F_y = \frac{(-D-y)\frac{G M_a m}{(-D-y)^2+x^2}}{\sqrt{(-D-y)^2+x^2}} + \frac{(D-y)\frac{G M_a m}{(D-y)^2+x^2}}{\sqrt{(D-y)^2+x^2}} + \frac{-y\frac{G M_b m}{y^2+(-D-x)^2}}{\sqrt{y^2+(-D-x)^2}} + \frac{-y\frac{G M_b m}{y^2+(D-x)^2}}{\sqrt{y^2+(D-x)^2}}$$

O simplificando:

$$y$$

$$(\text{¿¿}2+(D-x)^2)^{3/2}$$

$$F_y = \frac{(-D-y)G M_a m}{((-D-y)^2+x^2)^{3/2}} + \frac{(D-y)G M_a m}{((D-y)^2+x^2)^{3/2}} + \frac{-yG M_b m}{(y^2+(-D-x)^2)^{3/2}} + \frac{-yG M_b m}{\text{¿}}$$

Y en el caso de la fuerza paralela al eje x, utilizando un procedimiento similar:

$$y$$

$$(\text{¿¿}2+(D-x)^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$F_x = \frac{-xG M_a m}{((-D-y)^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{-xG M_a m}{((D-y)^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{(-D-x)G M_b m}{(y^2+(-D-x)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{(D-x)G M_b m}{\text{¿}}$$

Suponiendo que la estrella pequeña se mueva solo en el eje x, por lo que y=0 en cualquier tiempo

$$0$$

$$(\text{¿¿}2+(D-x)^2)^{3/2}=0$$

$$F_y = \frac{(-D)G M_a m}{(D^2+x^2)^{3/2}} + \frac{(D)G M_a m}{(D^2+x^2)^{3/2}} + \frac{0*G M_b m}{(0^2+(-D-x)^2)^{3/2}} + \frac{0*G M_b m}{\text{¿}}$$

$$F_x = \frac{-2\text{xG} M_a m}{(D^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{-G M_b m}{(-D-x)^2} + \frac{G M_b m}{(D-x)^2}$$

Si queremos que la estrella oscile alrededor del centro, tendremos que cuidar que la fuerza siempre sea negativa cuando x es positiva, y que sea positiva cuando x es negativa. Dicho mal y pronto:

$$\frac{F_x}{x}<0$$

Entonces tenemos que

$$\frac{-2M_a m}{\left(D^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}<\frac{M_b m}{x\left(-D-x\right)^2}-\frac{M_b m}{x\left(D-x\right)^2}$$

$$\frac{-2M_a}{M_b}<\frac{\left(D^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{x\left(-D-x\right)^2}-\frac{\left(D^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{x\left(D-x\right)^2}$$

$$\frac{-2M_a}{M_b}<\frac{\left(D^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{x\left(D+x\right)^2}-\frac{\left(D^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{x\left(D-x\right)^2}$$

$$\frac{-2M_a}{M_b}<\frac{\left(D^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}\left(D-x\right)^2}{x\left(D+x\right)^2\left(D-x\right)^2}-\frac{\left(D^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}\left(D+x\right)^2}{x\left(D+x\right)^2\left(D-x\right)^2}$$

$$\frac{-2M_a}{M_b}<\frac{-\left(D^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}4\mathrm{xD}}{x\left(D+x\right)^2\left(D-x\right)^2}$$

$$\frac{-2M_a}{M_b}<\frac{-4\mathrm{D}\left(D^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(D^2-x^2\right)^2}$$

$$\frac{M_a}{M_b}>\frac{2\mathrm{D}\left(D^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(D^2-x^2\right)^2}$$

Y si recordamos que la distancia máxima en la oscilación es d tenemos que:

$$\frac{M_a}{M_b}>\frac{2\mathrm{D}\left(D^2+d^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(D^2-d^2\right)^2}$$

Además si recordamos que esta distancia es minúscula con respecto a D tenemos que:

$$\frac{M_a}{M_b} > \frac{2\,D^4}{D^4} > 2$$

Por lo que concluimos que si la masa de la estrella b es menos de 2 veces la masa de la estrella a, la estrella pequeña oscilará, en caso contrario, la pequeña estrella caerá a una de las estrellas de masa M_b.

Pero acaso ¿se tratará de un movimiento armónico?

Si recordamos que x es muy pequeño con respecto a D tendremos que:

$$x^2 < d^2 \ll D^2$$

$$F_x \approx \frac{-2x\mathrm{G}\,M_a m}{D^3} + \frac{-G\,M_b m}{D^2} + \frac{G\,M_b m}{D^2} = \frac{-2x\mathrm{G}\,M_a m}{D^3}$$

Pero esto no se parece en nada a un movimiento armónico simple. Sin embargo si recordamos que el cuerpo oscila de –d a d y que D es mucho mayor a d, tenemos que:

Lo cual se asemeja a un movimiento armónico simple, donde:

$$k = \frac{2\mathrm{G}\,M_a m}{D^3}$$

De tal forma que el cuerpo describiría un movimiento armónico simple.

Problema 3

Es hora de generalizar el problema para una estrella ubicada en cualquier ángulo de la 1° estrella.

Tenemos que la fuerza de gravedad ejercida por cualquier estrella es:

$$F_i = \frac{G\,M_i m}{D_i^2}$$

Siendo la distancia a la estrella

$$D_i = \sqrt{(Dcos(\theta_i) - y)^2 + (Dsen(\theta_i) - x)^2}$$

Donde θ_i es el ángulo utilizando como base la estrella ubicada arriba de la primera. Rigiéndome por el manifiesto de Tau

$$\tau = 2\pi$$

$$\theta_i = \frac{i\tau}{n}$$

De esta forma la fuerza ejercida sobre la estrella pequeña por cada estrella sería

$$F_i = \frac{G M_i m}{(Dcos(\theta_i) - y)^2 + (Dsen(\theta_i) - x)^2}$$

Simplificando

$$F_i = \frac{G M_i m}{D^2 \cos^2(\theta_i) - 2\text{yDcos}(\theta_i) + y^2 + D^2 sen^2(\theta_i) - 2\text{xDsen}(\theta_i) + x^2}$$

$$F_i = \frac{G M_i m}{D^2 - 2\text{yDcos}(\theta_i) + y^2 - 2\text{xDsen}(\theta_i) + x^2}$$

Pero si recordamos que la estrella pequeña se mueve solo en el eje x, y =0, entonces

$$D_i = \sqrt{D^2 - 2\text{xDsen}(\theta_i) + x^2}$$

Con lo que tenemos que la fuerza que ejerce cada estrella a la pequeña estrella es de:

$$F_i = \frac{G M_i m}{D^2 - 2\text{xDsen}(\theta_i) + x^2}$$

Si descomponemos las fuerzas en una fuerza perpendicular al eje x y otra al eje y tenemos que:

$$F_y = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(Dcos(\theta_i) - y) F_i}{D_i}, F_x = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(Dsen(\theta_i) - x) F_i}{D_i}$$

$$F_y=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(Dcos(\theta_i)-y)G\,M_i m}{D_i^3},\ F_x=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(Dsen(\theta_i)-x)G\,M_i m}{D_i^3}$$

$$F_y=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{G\,M_i mDcos(\theta_i)}{\left(D^2-2\mathrm{xDsen}(\theta_i)+x^2\right)^{\frac{3}{2}}},\ F_x=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(Dsen(\theta_i)-x)G\,M_i m}{\left(D^2-2\mathrm{xDsen}(\theta_i)+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$F_y=0$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}\frac{G\,M_i mDcos(\theta_i)}{\left(D^2-2\mathrm{xDsen}(\theta_i)+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}=0\,;\forall-d\le x\le d$$

Si x<d<<D

$$\sum_{i=0}^{n-1}\frac{G\,M_i mDcos(\theta_i)}{D^3}=0\,;\forall-d\le x\le d$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}\frac{G\,M_i m\cos(\theta_i)}{D^2}=0\,;\forall-d\le x\le d$$

$$\frac{Gm}{D^2}\sum_{i=0}^{n-1}M_i\cos(\theta_i)=0\,;\forall-d\le x\le d$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}M_i\cos(\theta_i)=0\,;\forall-d\le x\le d$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}M_i\cos\left(\frac{i\tau}{n}\right)=0\,;\forall-d\le x\le d$$

Para solucionar este problema cabe pedir un sistema simétrico, donde la masa de la estrella que se encuentra abajo, sea la misma que se encuentra arriba, de esta forma cumpliríamos la igualdad para cualquier sistema.

$$M_i\cos\left(\frac{i\tau}{n}\right)=M_{n-i}\cos\left(\tau-\frac{i\tau}{n}\right)$$

$$M_i = M_{n-i}$$

Podemos obtener una simetría similar si requerimos que la fuerza en x=0 sea 0 (como para cualquier sistema armónico simple)

$$F_x = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\left(D sen\left(\theta_i\right) - x\right) G M_i m}{\left(D^2 - 2\text{xDsen}\left(\theta_i\right) + x^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

Si x=0

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{D sen\left(\theta_i\right) G M_i m}{D^3} = 0$$

$$\frac{Gm}{D^2} \sum_{i=0}^{n-1} sen\left(\theta_i\right) M_i = 0$$

$$\frac{Gm}{D^2} \neq 0$$

$$sen\left(\frac{i\tau}{n}\right) M_i = sen\left(\frac{\tau}{2} - \frac{i\tau}{n}\right) M_{\frac{n}{2}-i} \ \forall\, i \leq \frac{n}{2}$$

$$sen\left(\tau - \frac{i\tau}{n}\right) M_{n-i} = sen\left(\frac{\tau}{2} + \frac{i\tau}{n}\right) M_{\frac{n}{2}-i} \ \forall\, i \geq \frac{n}{2}$$

Estos sistemas simétricos no son la única solución al problema, pero probablemente sean las más sencillas. Siguiendo con las simplificaciones al problema, podemos calcular cual es la masa máxima de una estrella en cada ángulo si utilizamos la ecuación de la fuerza Fx:

$$F_x = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\left(D sen\left(\theta_i\right) - x\right) G M_i m}{\left(D^2 - 2\text{xDsen}\left(\theta_i\right) + x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Suponiendo que todas las masas son 0 a excepción de la masa i (y sus simétricas) y de las estrellas principales (la de arriba y la de abajo) tenemos una gráfica del siguiente tipo:

Para 64 estrellas

Esto coincide con la fórmula empírica:

$$M_i < \frac{M_a}{3\operatorname{sen}\left(\frac{2i\tau}{n} - \frac{\tau}{4}\right) + 1}$$

$$M_i < \frac{M_a}{3\operatorname{sen}\left(\frac{2i\tau}{n}\right)\cos\left(\frac{-\tau}{4}\right) + 3\operatorname{sen}\left(\frac{-\tau}{4}\right)\cos\left(\frac{2i\tau}{n}\right) + 1}$$

$$M_i < \frac{M_a}{1 - 3\cos\left(\frac{2i\tau}{n}\right)}$$

$$M_i < \frac{M_a}{-3\cos^2\left(\frac{i\tau}{n}\right) + 3\,sen^2\left(\frac{i\tau}{n}\right) + 1}$$

$$M_i < \frac{M_a}{6\,sen^2\left(\frac{i\tau}{n}\right) - 2}$$

$$M_i < \frac{M_a/2}{3\,sen^2\left(\frac{i\tau}{n}\right) - 1}$$

$$M_i < \frac{M_a}{2\left(\sqrt{3}\,sen\left(\frac{i\tau}{n}\right) - 1\right)\left(\sqrt{3}\,sen\left(\frac{i\tau}{n}\right) + 1\right)}$$

Y para un número (múltiplo de 4) n de estrellas tendríamos que:

$$\sum_{i=0}^{n-1} 3\, M_i\, sen\left(\frac{2\mathrm{i}\,\tau}{n} - \frac{\tau}{4}\right) + M_i < 4\mathrm{M}_a$$

O también

$$\sum_{i=0}^{n-1} M_i - 3\, M_i \cos\left(\frac{2\mathrm{i}\tau}{n}\right) < 4\mathrm{M}_a$$

Con lo cual para 8 estrellas tendríamos que, si la masa de M_a es 1 unidad estelar, la masa M_b de las estrellas en las posiciones de $\frac{\tau}{8}, \frac{3\tau}{8}, \frac{5\tau}{8}\, y\, \frac{7\tau}{8}$ y la masa M_c en las posiciones $\frac{2\tau}{8}\, y\, \frac{6\tau}{8}$ podrían ser respectivamente:

Mb	Mc	Mb	Mc
0	0.5	0.55	0.225
0.05	0.475	0.6	0.2
0.1	0.45	0.65	0.175
0.15	0.425	0.7	0.15
0.2	0.4	0.75	0.125
0.25	0.375	0.8	0.1
0.3	0.35	0.85	0.075
0.35	0.325	0.9	0.05
0.4	0.3	0.95	0.025
0.45	0.275	1	0

De manera que se cumpla la condición previamente establecida. (Para el caso especial de las estrellas en $\frac{2\tau}{8}\, y\, \frac{6\tau}{8}$ la masa deberá ser multiplicada por 2)