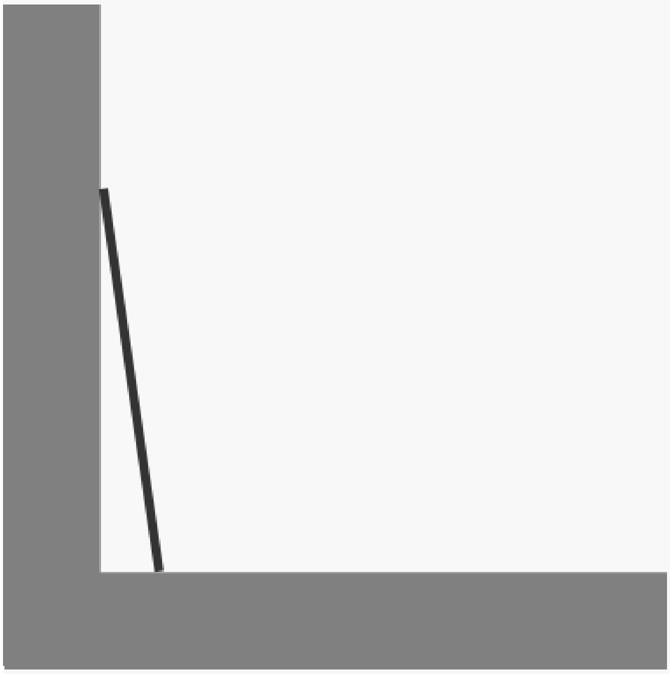
Desafío: El palo deslizante

Imagina una pared y un suelo perfectamente lisos (no hay rozamiento), con el suelo horizontal y la pared vertical. Imagina también que hay un palo de longitud L y masa M (de grosor despreciable) apoyado en la pared. De estar colocado verticalmente, tocando la pared en todos sus puntos, se encontraría en equilibrio, pero imagina también que el extremo inferior se separa una distancia minúscula de la pared.

El palo ya no estará absolutamente vertical, y dado que no hay rozamiento, empezará a deslizarse hacia abajo y la derecha, al principio muy lentamente (parte del reposo) pero cada vez más deprisa.



Al cabo de cierto tiempo, la velocidad horizontal del palo será constante de ahí en adelante para siempre –esto te lo aseguro yo, para que luego te quejes–. Y la pregunta del desafío es: *¿cuál será el valor de esa velocidad horizontal “terminal” para el centro de masa del palo?*

Primera respuesta:

La primera impresión que me dio el problema fue que era muy fácil, así que me puse a resolverlo partiendo del principio de que la energía se conserva.

Nos dicen que tenemos un palo inmóvil de longitud L y masa M, con su centro de gravedad a una altura L/2. Por tanto su energía es solo la energía potencial, cuya fórmula es Mgh. Como h vale L/2, su energía será MgL/2. Después de inclinarse y caer, lo que tendré es un palo en posición horizontal moviéndose hacia la derecha a una velocidad V. En este caso solo hay energía cinética, de fórmula $MV^2/2$. Igualamos las dos fórmulas aplicando el principio de conservación de la energía:

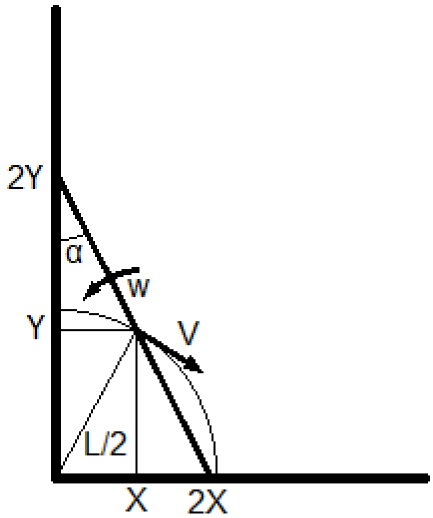
$$\frac{MgL}{2} = \frac{MV^2}{2}$$

De aquí se obtiene la solución, $V = \sqrt{gL}$

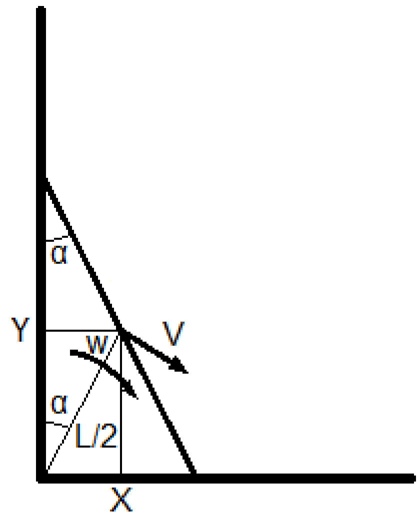
Primer intermedio:

Sin embargo había algo que no me acababa de cuadrar. ¿Cómo se pasa de ese movimiento vertical a la posición horizontal sin que intervenga el rozamiento? Además, Pedro no pondría nunca un desafío tan sencillo. De modo que volví a estudiar el problema con algo más de profundidad.

Segunda respuesta:



Analizamos la posición del centro de masas considerando que sus coordenadas son (X,Y). Al estar apoyados los extremos en la pared y el suelo, que tomaremos como ejes de coordenadas, y al ser el centro de masas el centro de una barra de longitud L, las posiciones en las que toca la pared y el suelo serán, respectivamente, (0,2Y) y (2X,0). Por semejanza de triángulos sabemos que la distancia al origen del centro de masas es L/2, de modo que aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo de lados X, Y y L/2 nos queda que $X^2+Y^2=L^2/4$. Esta es la ecuación de una circunferencia centrada en el origen y de radio R=L/2, y ese es el recorrido del centro de masas.



Sobre el dibujo definimos el ángulo α que forma la barra con la vertical, la velocidad V del centro de masas y la velocidad de giro w de la barra respecto a su centro de masas. En el segundo dibujo vemos la relación entre V y w: V=wR=wL/2.

Una vez definidos todos los términos volvemos a aplicar el principio de conservación de la energía, solo que ahora tendremos tres términos en vez de dos. La energía de la barra se debe a su posición -energía potencial-, al desplazamiento de su centro de masas -energía cinética de traslación- y al giro de la barra alrededor de su centro de masas -energía cinética de rotación-. Las fórmulas que nos dan el valor de los tres son Ep=Mgh, $Ect=MV^2/2$ y $Ecr=Iw^2/2$. El valor de I para una barra de grosor despreciable con respecto a un eje que pase por su centro es $I=ML^2/12$, y el de w en nuestro caso era w=2V/L. Por tanto la energía total cuando el centro de masas está a una altura Y es:

$$E=Ep+Ect+Ecr=MgY+\frac{MV^2}{2}+\frac{IW^2}{2}=MgY+\frac{MV^2}{2}+\frac{MV^2}{6}=MgY+\frac{2MV^2}{3}$$

En el instante inicial la altura del centro de masas era L/2 y la velocidad 0, por lo que la energía era:

$$E=\frac{MgL}{2}$$

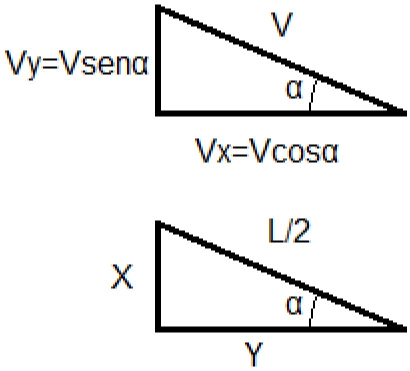
Igualando las dos fórmulas tenemos:

$$MgY+\frac{2MV^2}{3}=\frac{MgL}{2}$$

Despejando V queda:

$$V=\frac{\sqrt{3g(L-2Y)}}{2}$$

A partir del valor de V calculamos los valores de sus componentes horizontal y vertical, Vx y Vy, aprovechando que el ángulo de V con la horizontal es el ángulo α ya conocido. Vx=Vcosα y Vy=Vsenα. Como el triángulo de lados X, Y y L/2 tiene el mismo ángulo α, sabemos que cosα=2Y/L y senα=2X/L. Por tanto Vx=2YV/L y Vy=2XV/L.



Así que ya tenemos el valor de la velocidad horizontal:

$$Vx=\frac{2YV}{L}=\frac{2Y}{L}\frac{\sqrt{3g(L-2Y)}}{2}=\frac{Y\sqrt{3g(L-2Y)}}{L}$$

<u>Segundo intermedio:</u>

Ya está, problema resuelto. Pero de nuevo hay algo que no encaja, Pedro ha dicho literalmente que *“Al cabo de cierto tiempo, la velocidad horizontal del palo será constante de ahí en adelante para siempre –esto te lo aseguro yo, para que luego te quejes–.”* Eso contradice el resultado ya que Vx está en función de Y, por lo que no es constante. ¿Dónde está el error?

“Sutilmente” aproveché los comentarios del problema para tratar de sacar información a Pedro. Aquí está el cruce de pregunta y respuesta que mantuvimos:

-Mmonchi: *Pues si no fuera por esa "ayuda" de que el valor terminal es constante, ya estaría hecho :-(*

»Mientras averiguo en qué me he equivocado, una aclaración: ¿Los extremos de la barra están siempre en contacto con las paredes? Lo digo para descartar cosas raras, como que el extremo de la izquierda se separe de la pared antes de llegar al suelo, o que el del suelo se levante por la rotación de la barra...

-Pedro: *Mmonchi, el extremo estará en contacto con la pared mientras lo esté, tal vez siempre, tal vez no :) Lo mismo respecto al otro extremo, tal vez se levante, tal vez no... a ver si encuentras dónde te has colado (o demuestras que la velocidad horizontal del centro de masa no termina siendo constante y entonces me he colado yo, claro) ;)*

Sabiendo ya que sí, que la velocidad era constante -porque descarté que Pedro se hubiera colado, claro- había que buscar el error. Eso nos lleva a dar un paso más en el estudio del problema.

Tercera respuesta:

Tenemos un análisis de las energías que se basa en una hipótesis, que los extremos de la barra están apoyados en la pared y en el suelo, lo que limita sus posibilidades de moverse. Para ver qué está ocurriendo recordamos la primera ley de Newton: ΣF=Ma. Las fuerzas que intervienen son tres, el peso -Mg- y las reacciones entre la barra y el suelo -vertical- y entre la barra y la pared -horizontal-. Esas fuerzas se equilibran con el término que depende de la aceleración, que tiene una componente horizontal y otra vertical.

Ahora hay que combinar ambos análisis, el que se basa en las energías y el que se basa en las fuerzas. Dado que Vx(Y) comienza valiendo 0 -Vx(L/2)=Y√(3g(L-2Y))/L=0- y termina valiendo también 0 -Vx(0)=Y√(3g(L-2Y))/L=0- es evidente que durante un tiempo ha aumentado hasta llegar al valor máximo y después ha disminuido. O lo que es lo mismo, que durante el primer intervalo la velocidad horizontal ha acelerado y durante el segundo ha decelerado. O diciéndolo en términos de la primera ley de Newton, durante el primer intervalo la barra sufre una fuerza horizontal hacia la derecha procedente de la pared y durante el segundo la fuerza horizontal que sufre es hacia la izquierda.

Pero -y aquí está la clave del problema- no hay nada que pueda provocar una fuerza de la pared contra la barra *hacia la izquierda*. Si la pared hubiera sido un poste vertical y la barra hubiera tenido una argolla articulada en su extremo superior, dicha argolla habría impedido que la barra se separara del poste generando una fuerza hacia la izquierda que habría frenado su velocidad horizontal. Ese era el problema resuelto en la segunda solución, pero no nuestro problema. No a partir del momento en el que se alcanza el valor máximo de Vx, el momento en que la aceleración horizontal se anula, cuando deja de haber reacción entre la pared y la barra. De ahí en adelante la barra se separará de la pared, pues sabemos que lo que la uniría es una fuerza que no existe. Y al separarse de la pared ya no hay fuerzas horizontales por lo que tampoco hay aceleraciones horizontales: la velocidad horizontal del centro de masas no variará más.

¡Pedro tenía razón! La velocidad horizontal será constante a partir del momento en que se alcance la velocidad horizontal máxima, que será la velocidad terminal buscada.

Para hallar el máximo de Vx(Y) la derivamos:

$$\frac{dVx}{dY}=\frac{-3gY}{L\sqrt{3g(L-2Y)}}+\frac{\sqrt{3g(L-2Y)}}{L}=\frac{\sqrt{3g(L-2Y)}}{L}\,\frac{L-3Y}{L-2Y}$$

El máximo lo tenemos cuando dVx/dY=0 que se da si L-3Y=0, Y=L/3. Calculamos Vx(L/3):

$$Vx\left(\frac{L}{3}\right)=\frac{L}{3}\,\frac{\sqrt{3g\left(L-\frac{2L}{3}\right)}}{L}=\frac{\sqrt{gL}}{3}$$

Por tanto esa es la velocidad terminal buscada, la que se obtiene cuando la pared deja de ejercer fuerza contra la barra y esta se separa para alejarse indefinidamente:

$$V=\frac{\sqrt{gL}}{3}$$

Explicación final:

Hemos alcanzado un valor para la velocidad terminal que es un tercio del que obtuvimos al principio. ¿Pero qué pasa con las energías? ¿Dónde van a parar para hacer que la barra se mueva más despacio de lo previsto? Hay que recordar cómo era el movimiento de la primera solución: una barra tumbada en el suelo deslizándose sin fricción. La realidad que alcanzamos en la tercera solución es muy diferente, la barra choca contra el suelo y rebota, girando alternativamente en un sentido y en el otro mientras los extremos rebotan contra el suelo sin parar. La suma de la energía potencial de la altura del centro de masas y las energías cinéticas de su velocidad vertical y de rotación no varía durante ese baile, siendo esa energía la que falta para que la velocidad terminal sea la que calculamos en primer lugar. Al no existir rozamiento esos rebotes serán solo verticales, sin ninguna componente horizontal que altere la velocidad terminal que se mantendrá por tanto constante.