PUNTO 1: ECUACIONES CINEMÁTICAS

El primer paso que he dado para resolver el problema es estudiar la cinemática del centro de masas cuando el palo apoya en ambos extremos. En este caso sólo existe **un grado de libertad**, es decir, se puede definir la posición sin ambigüedad mediante un solo parámetro. Puede elegirse el que se quiera (altura del punto superior, distancia horizontal del punto inferior a la pared, etc…) pero me ha parecido más útil el ángulo de giro (θ).

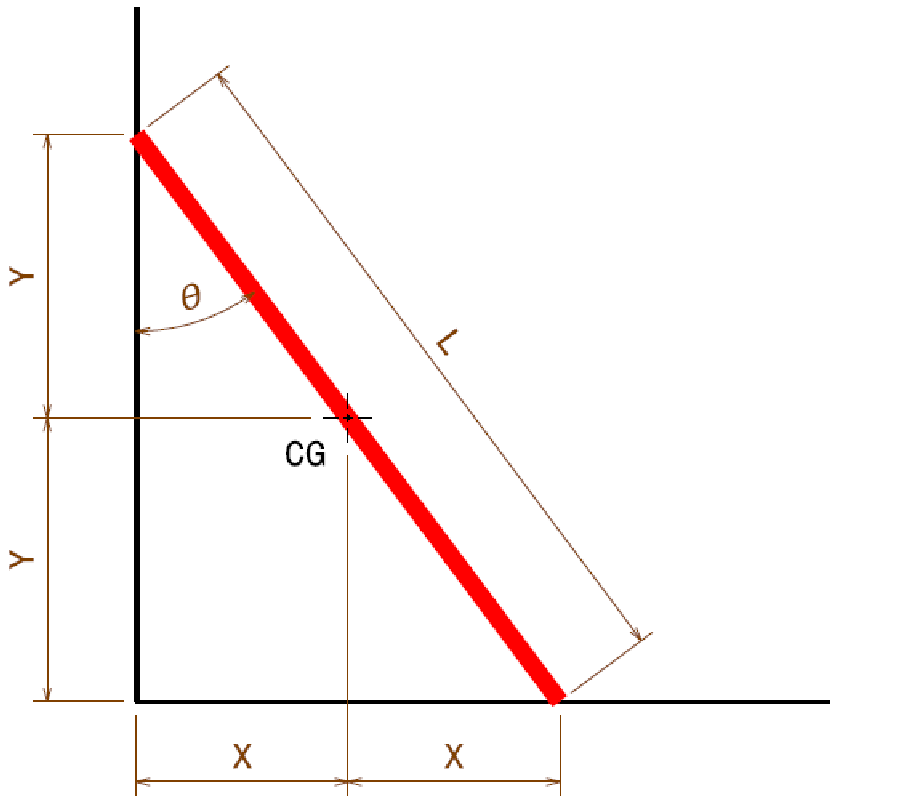

Fig 1

De aquí sacamos las dos ecuaciones fundamentales de la cinemática del palo, las que relacionan las coordenadas del centro de masas con el ángulo de giro:

① $$x[t] = \frac{L}{2}\sin[\theta[t]]$$

② $$y[t] = \frac{L}{2}\cos[\theta[t]]$$

***Nota avergonzada**: para cualquiera acostumbrado a hacer problemas de física resultaría evidente, al ver estas dos ecuaciones, que el centro de masas describirá un arco de circunferencia durante el movimiento. Yo tuve que esperar a hacer una simulación numérica con ordenador para darme cuenta. En fin…*

PUNTO 2: ECUACIONES DE LA DINÁMICA

El siguiente paso es plantear las ecuaciones de la dinámica del cuerpo. Las fuerzas a las que está sometido son tres: peso (m·g), reacción del suelo (R_Y) y reacción de la pared (R_X).

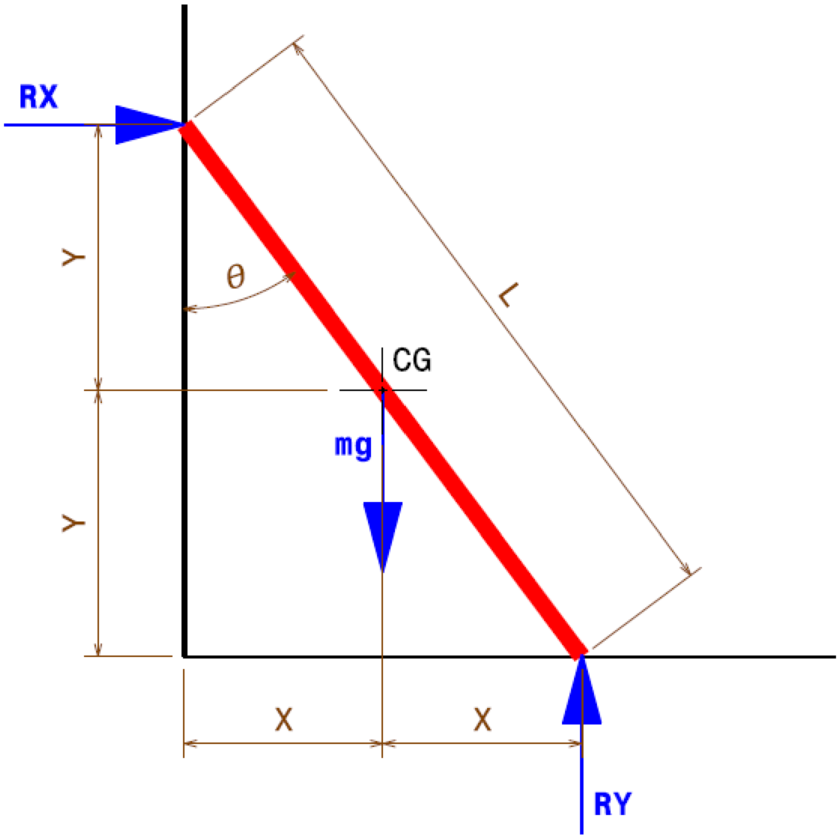

Fig 2

Antes de plantear ecuaciones como descosidos, un par de comentarios que dan una idea cualitativa del problema:

- **Las reacciones van variando a lo largo del tiempo**, mediante unas funciones que no conocemos a priori. Parece evidente que R_Y empezará valiendo (casi) exactamente igual que el peso y que R_X empezará siendo (casi) nula. El 'casi' lo pongo porque en las condiciones iniciales el palo no está totalmente vertical y pegado a la pared, ya que entonces se quedaría de pie en equilibrio y no habría movimiento alguno.

- **Son las propias reacciones las que hacen girar el palo**, ya que la otra fuerza en juego se encuentra aplicada en el centro de masas. La reacción del suelo tenderá a hacerlo girar en sentido antihorario, mientras que la de la pared "intentará" hacerle girar en sentido horario. De antemano sabemos que el sentido en el que gira es antihorario.

Las dos ecuaciones del movimiento lineal del centro de masas, según la Segunda Ley de la Dinámica, son:

$$\sum F_X = m \cdot x''[t]$$

$$\sum F_Y = m \cdot y''[t]$$

Calculando…

③ $R_X[t] = m \cdot x''[t]$

④ $R_Y[t] = m(y''[t] + g)$

De manera análoga (dado que se trata de un movimiento plano, de manera que el giro se produce según un eje principal de inercia) la aceleración angular del cuerpo se calcula en función de los momentos aplicados ∑M y el momento de inercia I. Tomamos como origen de momentos el propio centro de masas:

> ***Nota:*** *Los sentidos de las magnitudes de giro (θ, θ' y θ'') son positivos en sentido antihorario.*

$$\sum M = \theta''\,[t] \cdot I$$

La suma de momentos respecto al centro de masas (mirar figura 2 para ver sentidos, brazos y fuerzas) queda como:

$$\sum M = R_Y[t] \cdot x[t] - R_X[t] \cdot y[t]$$

De forma que al final, despejando la aceleración angular:

⑤ $\theta''[t] = \frac{R_Y[t] \cdot x[t] - R_X[t] \cdot y[t]}{I}$

PUNTO 3: ECUACIÓN DIFERENCIAL

Llegados a este punto, recapitulamos las cinco ecuaciones que hemos obtenido:

① $x[t] = \frac{L}{2}\sin[\theta[t]]$

② $y[t] = \frac{L}{2}\cos[\theta[t]]$

③ $R_X[t] = m \cdot x''[t]$

④ $R_Y[t] = m(y''[t] + g)$

⑤ $\theta''[t] = \frac{R_Y[t]\cdot x[t] - R_X[t]\cdot y[t]}{I}$

Antes de seguir analizando el problema conviene reordenar y dejar bien preparadas estas expresiones con el fin de utilizarlas luego con mayor comodidad. Las ecuaciones ① y ② pueden utilizarse, mediante derivación, para obtener las expresiones de {x', x'',y',y''} en función de {θ,θ',θ''}. Con ellas podemos expresar Rx y Ry (ecuaciones ③ y ④) en función del ángulo de giro y sus derivadas, de forma que la ecuación ⑤ sea una ecuación diferencial en la que sólo aparezcan ángulo de giro, velocidad angular y aceleración angular.

3.1 - Derivadas

A la hora de derivar respecto del tiempo, es importante tener en cuenta que θ[t] es, a su vez, función desconocida del tiempo (de ahí que aparezcan en el proceso θ'[t] y θ''[t]).

⑥ $x'[t] = \frac{L}{2}\cos[\theta[t]] \cdot \theta'[t]$

⑦ $x''[t] = \frac{L}{2}(\cos\left[\theta[t]\right] \cdot \theta''[t] - \sin\left[\theta[t]\right] \cdot \theta'[t]^2)$

⑧ $y'[t] = -\frac{L}{2}\sin[\theta[t]] \cdot \theta'[t]$

⑨ $y''^{[t]} = -\frac{L}{2}(\sin\left[\theta[t]\right] \cdot \theta''[t] + \cos\left[\theta[t]\right] \cdot \theta'[t]^2)$

3.2 – Momento de inercia

El momento de inercia respecto al centro de masas de una varilla uniforme es:

⑩ $\mathrm{I} = \int_{-\mathrm{L}/2}^{\mathrm{L}/2} \mathrm{x}^2 \mathrm{dm} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{L}} \int_{-\mathrm{L}/2}^{\mathrm{L}/2} \mathrm{x}^2 \mathrm{dx} = \frac{\mathrm{mL}^2}{12}$

3.3 – Cálculos → Ecuación diferencial

- Eliminar {x[t],y[t],I} en ⑤ mediante ① ,② y ⑩.

$$\theta''[t] = \frac{R_Y[t]\cdot\frac{L}{2}\sin[\theta[t]] - R_X[t]\cdot\frac{L}{2}\cos[\theta[t]]}{\frac{mL^2}{12}}$$

- Eliminar x''[t] e y''[r] en ③ y ④ mediante ⑦ y ⑨.

$$R_X[t] = m\cdot\frac{L}{2}(\cos[\theta[t]]\cdot\theta''[t] - \sin[\theta[t]]\cdot\theta'[t]^2)$$

$$R_Y[t] = m\left(g - \frac{L}{2}(\sin[\theta[t]]\cdot\theta''[t] + \cos[\theta[t]]\cdot\theta'[t]^2)\right)$$

- Eliminar Rx[t] y Ry[t] de ⑤ mediante ③ y ④ modificadas.

$$\theta''[t] = \frac{mg\frac{L}{2}\sin[\theta[t]] - m\frac{L^2}{4}\theta''[t] + \overbrace{m\frac{L^2}{4}\theta'[t]^2(\cos[\theta[t]]\cdot\sin[\theta[t]] - \cos[\theta[t]]\cdot\sin[\theta[t]])}^{0}}{\frac{mL^2}{12}}$$

$$\theta''[t] = \frac{6g\sin[\theta[t]]}{L} - 3\theta''[t]$$

Que como resultado final nos da la expresión:

⑪ $\theta''[t] = \frac{3}{2}\frac{g}{L}\sin[\theta[t]]$

Parece que hemos dado con **la ecuación que define todo el movimiento en cuestión**. Sólo está en función de g y L (incluso la masa se ha ido) y las únicas funciones del tiempo son la aceleración angular y el ángulo de giro, siendo una la derivada segunda de la otra respecto del tiempo.

Volveremos posteriormente sobre esta ecuación…

PUNTO 4: OBJETIVO DEL PROBLEMA

El objetivo del problema es encontrar la **velocidad final horizontal del centro de masas**, que según se nos dice es constante a partir de cierto momento. Si la velocidad horizontal es constante, es porque el sumatorio de fuerzas en X se equilibra y deja de existir aceleración horizontal. Repasando lo que hemos visto el punto 2:

$$x'[t]=cte \rightarrow x''[t]=0 \rightarrow R_X[t]=0$$

De manera que, llegado un punto, la reacción de la pared valdrá 0. Pero ¿qué significa esto realmente? Desde el primer momento hemos planteado todas las ecuaciones suponiendo que ambos extremos del palo apoyaban, uno en la pared y otro en el suelo. Sin embargo, si la reacción horizontal llega a 0, **el extremo superior del palo se separará de la pared**.

Hablando con más claridad que rigor, podría decirse que en la fase de doble apoyo que estamos estudiando, el punto superior tiende a hundirse en la pared debido al giro (y por esto aparece una reacción Rx) pero al mismo tiempo tiende a separarse por el desplazamiento hacia la derecha del centro de gravedad. Llegado un momento, la velocidad que gana el centro de gravedad "vence" sobre la tendencia del giro a hundirlo en la pared (creo que en esta idea está el germen de una solución más elegante que la que he encontrado, pero soy incapaz de dar con ella). Dado que la reacción no puede ser negativa (la pared no puede tirar del palo, sólo empujarlo) se produce la separación.

A partir de este momento el movimiento está descrito por otras ecuaciones distintas que no necesitamos. Sin ninguna fuerza horizontal aplicada, la velocidad del centro de gravedad se mantendrá constante mientras el palo sigue girando y desplazándose hacia la derecha, hasta quedar horizontal en el suelo.

Nota: *Los valores concretos que hagan referencia al momento de la separación de la pared llevarán el subíndice 'c' de 'crítico' para diferenciarlos de las expresiones válidas para todo momento t.*

4.1 – Condición de separación

Utilizando la ecuación ⑦, la condición de separación queda como:

$$x_C'' = 0 \ \rightarrow \ x_C'' = \frac{L}{2}[\cos[\theta_C]\cdot\theta_C'' - \sin[\theta_C]\cdot{\theta_C'}^2] \ \rightarrow \ 0 = \cos[\theta_C]\cdot\theta_C'' - \sin[\theta_C]\cdot{\theta_C'}^2$$

⑫ $$\theta_C'' = {\theta_C'}^2 Tan[\theta_C]$$

4.2 – Velocidad final

Simplemente, particularizando ⑥ para el momento de la separación, tenemos la expresión de la velocidad final que estamos buscando.

⑬ $$x_C' = \frac{L}{2}\cos[\theta_C]\cdot\theta_C'$$

PUNTO 5: PROBLEMA CON EL PROBLEMA

Recapitulando, tenemos:

⑪ $$\theta''[t] = \frac{3}{2}\frac{g}{L}\sin\left[\theta[t]\right]$$

⑫ $$\theta_C'' = \theta_C'^2 Tan[\theta_C]$$

⑬ $$x_C' = \frac{L}{2}\cos[\theta_C]\cdot\theta_C'$$

Podría pensarse que la solución se limita a resolver la ecuación diferencial ⑪, sacar el tiempo crítico en la ecuación ⑫ y sustituir dicho tiempo en la ecuación ⑬. El problema es que la ecuación diferencial ⑪ es mucho más complicada de lo que parece, y ni de lejos me veo capaz de resolverla por mí mismo analíticamente. Intenté introducirla en un programa comercial de análisis matemático y…

$$\{\theta[t] \to -2\text{JacobiAmplitude}[\frac{\sqrt{-3gt^2 + Lt^2C[1] - 6gtC[2] + 2LtC[1]C[2] - 3gC[2]^2 + LC[1]C[2]^2}}{2\sqrt{L}}, \frac{6g}{3g - LC[1]}]\}$$

Yo sinceramente no sé qué es ese horror ni creo que nadie deba saberlo. Me lo tomo simplemente como un '**no vas a resolver esa ecuación diferencial** ni de coña, no lo intentes'.

Ya que tenía tres ecuaciones, intenté despejar la velocidad sin tener en cuenta que las θ, θ' u θ'' eran derivadas unas de otras, sino tratándolas como incógnitas numéricas (a fin de cuentas, la solución es un valor, no una función), pero tenía cuatro incógnitas {X'_C, θc, θ'c' ,θ''c} y sólo tres ecuaciones independientes, así que por ahí tampoco hubo suerte.

PUNTO 6: DEUX EX MACHINA

Derrotado, me limité a hacer lo que he hecho otras veces con este tipo de problemas. Ya que tenía una expresión de la aceleración angular en función del ángulo de giro, programé una **simulación numérica** mediante el método de Runge-Kutta.

Aproveché la simulación para comprobar un detalle que antes he pasado por alto: que la reacción en el suelo nunca se anulaba, no al menos antes de que se anulara la de la pared (es decir, el palo no se despega del suelo antes de despegarse de la pared). Esta condición es crucial, pues de no haberse cumplido todo el planteamiento descrito hasta ahora no valdría para nada.

El caso es que estuve corriendo la simulación unas cuantas veces hasta que un detalle llamó mi atención. Por simple comodidad, a los valores de masa, longitud y aceleración gravitatoria les di valor 1. Con esas condiciones, **la velocidad angular en el momento de la separación de la pared (θ'c) era siempre igual a 1**. Varié la masa y seguía siendo θ'c=1. Modificando la longitud y la gravedad el valor de θ'c sí cambiaba. Con análisis dimensional llegué a la conclusión de que la expresión de θ'c debía ser:

$$\theta'_C = Cte \cdot \sqrt{\frac{g}{L}} \qquad \text{ya que} \qquad \sqrt{\frac{LT^{-2}}{L}} = T^{-1}$$

Que son efectivamente dimensiones de velocidad angular. Dado que con los valores de L=1 y g=1 resultó que θc'=1, estaba claro que Cte=1.

⑭ $$\theta'_C = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Comprobé la expresión ⑭variando los valores de L y g y vi que se cumplía. Un Deux Ex Machina en toda regla, porque **reconozco no saber de dónde sale dicho valor**. Sólo sé que la simulación numérica me lo ha puesto en bandeja.

El caso es que sustituyendo θ'c con ⑭ en ⑫…

$$\theta''_C = \frac{g}{L} tg[\theta_C]$$

Y con esto en ⑪…

⑮ $$\frac{g}{L} tg[\theta_C] = \frac{3}{2}\frac{g}{L}\sin[\theta_C] \rightarrow \cos[\theta_C] = \frac{2}{3}$$

Ahora, ya con ⑭ y ⑮ en ⑬…

$$x'_C = \frac{L}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$\boldsymbol{x'_C = \frac{\sqrt{gL}}{3}}$$

Que es el valor final de la velocidad horizontal del centro de masas.