El palo deslizante

Daniel González Arribas

1. Introducción

Imagina una pared y un suelo perfectamente lisos (no hay rozamiento), con el suelo horizontal y la pared vertical. Imagina también que hay un palo de longitud L y masa m[1] *(de grosor despreciable) apoyado en la pared. De estar colocado verticalmente, tocando la pared en todos sus puntos, se encontraría en equilibrio, pero imagina también que el extremo inferior se separa una distancia minúscula de la pared.*

El palo ya no estará absolutamente vertical, y dado que no hay rozamiento, empezará a deslizarse hacia abajo y la derecha, al principio muy lentamente (parte del reposo) pero cada vez más deprisa.

Al cabo de cierto tiempo, la velocidad horizontal del palo será constante de ahí en adelante para siempre –esto te lo aseguro yo, para que luego te quejes–. Y la pregunta del desafío es: ¿cuál será el valor de esa velocidad horizontal "terminal" para el centro de masa del palo?

2. Planteamiento y notación

En primer lugar, vamos a suponer que el palo tiene densidad lineal constante y que todas las posibles colisiones son elásticas (no existe disipación de energía mecánica). Esta hipótesis tiene dos implicaciones:

- El centro de gravedad se encuentra exactamente en el centro del palo
- El momento de inercia I del palo en torno al eje normal al papel (el papel en el que dibujamos el palo, claro) es[2] $I = \dfrac{1}{12}mL^2$

Denominaremos, de acuerdo a la figura 1:

- $(x_{\mathrm{CG}}, y_{\mathrm{CG}})$ a la posición del centro de gravedad
- $(x_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{A}})$ a la posición del extremo del palo en contacto con el suelo
- $(x_{\mathrm{B}}, y_{\mathrm{B}})$ a la posición del otro extremo del palo
- $(v_x, v_y) = (\dot{x}_{\mathrm{CG}}, \dot{y}_{\mathrm{CG}})$ a la velocidad del C.D.G.
- φ al ángulo formado entre la horizontal y la normal al palo en el sentido indicado en la figura y $\omega = \dot{\varphi}$ a la velocidad angular (ver criterio de signos en la figura 1)

[1] Denominamos m a la masa y no M por si tenemos que usar M para los momentos

[2]
$$\int_{-L/2}^{L/2} \rho_L x^2 dx = \int_{-L/2}^{L/2} \left(\frac{m}{L}\right) x^2 dx = \left(\frac{m}{L}\right) \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-L/2}^{L/2} = \frac{m}{3 \cdot 2^3 L}(L^3 + L^3) = \frac{1}{12} mL^2$$

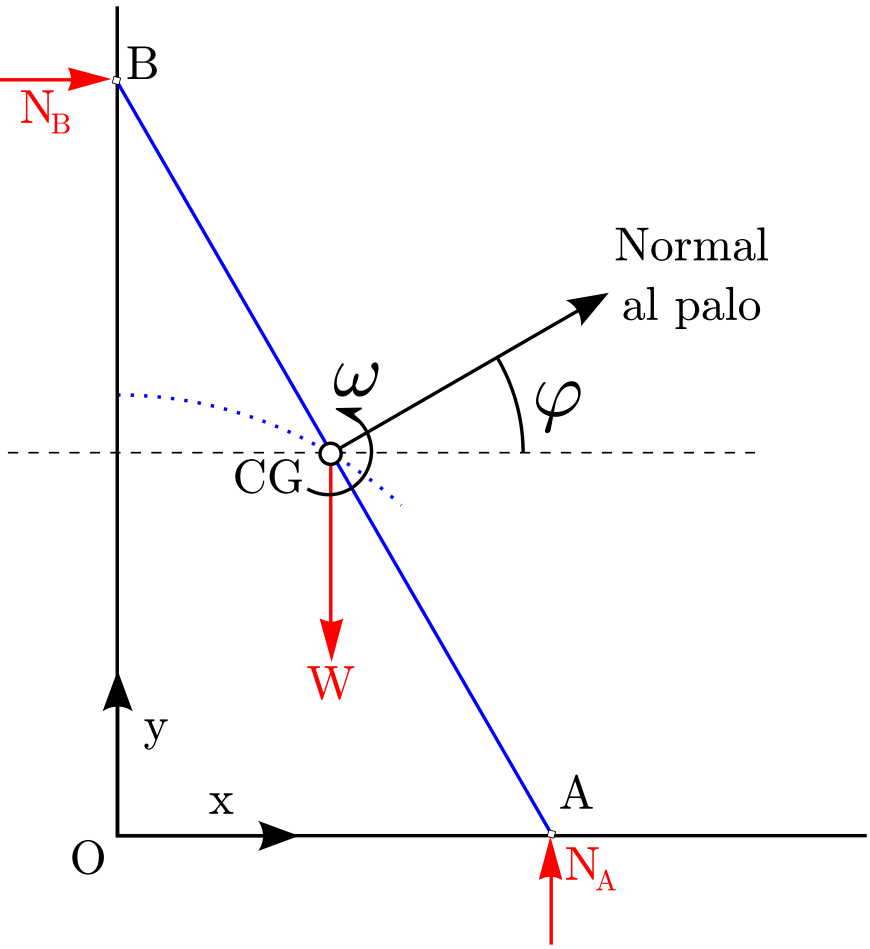

Figura 1: Las fuerzas en rojo, las violetas en azul

2.1. Reacciones

Cuando aplicas una fuerza sobre un abismo, el abismo te devuelve la fuerza. Con la misma dirección y sentido contrario.

– Friedrich Wilhelm Nietzsche medita acerca de la tercera Ley de Newton[3]

Como muestra el diagrama de la figura 1, tenemos que tener en cuenta tres fuerzas en este problema. El peso tiene magnitud mg, dirección y sentido del eje y negativo, y se aplica en el centro de masa. Las otras dos fuerzas que aparecen son las *normales* o *reacciones*: las fuerzas que impiden que el palo atraviese la pared o el suelo. Estas fuerzas son perpendiculares a la pared y el suelo, respectivamente

[3]Puede que la cita no sea completamente fiel a la frase original.

3. Resolución

Estamos ante un sistema mecánico con tres grados de libertad mecánicos y dos restricciones mecánicas (que no atraviese ni el suelo ni la parted) que pueden estar activas o no dependiendo de si el palo está "apoyado" o no en el suelo y la pared. Si sabemos, en cada momento, si el palo está apoyado en el suelo o la pared podemos determinar su evolución mediante la aplicación de las leyes de Newton: la dificultad reside, fundamentalmente, en determinar en cada momento dónde está apoyado (o no) el palo.

Una observación importante es que, dado que no existe rozamiento ni ninguna fuente de dispación de energía mecánica, la energía mecánica se conserva. La energía mecánica es la suma de la energía cinética (de rotación y de traslación) y la energía potencial:

$$E = E_{c,l} + E_{c,r} + E_p = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) + mgy_{\mathrm{CG}} = \mathrm{cte} \quad (1)$$

Aprovecharemos este hecho en el desarrollo.

3.1. Caída

En primer lugar, vamos a hacer la suposición intuitiva de que inicialmente el palo está apoyado tanto en el suelo (por el extrmeo A) como en la pared (por el extremo B), lo que implica que el sistema tiene un único grado de libertad mecánico: una vez conozcamos una variable de posición (φ, x_{CG} o y_{CG}) podemos calcular el valor de las otras dos; una vez conozcamos el valor de una de las velocidades (ω, v_x o v_y), podemos calcular el valor de las otras dos. Comencemos con las posiciones a partir de φ:

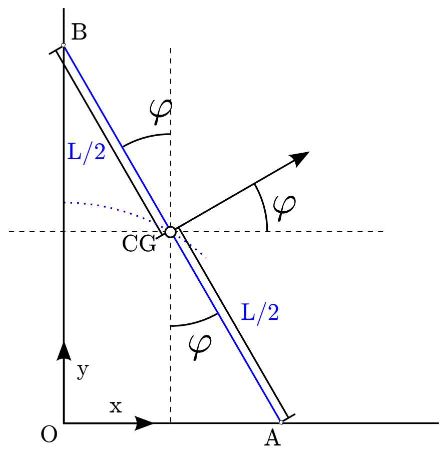

Figura 2: Calculando posiciones

Claramente $y_{\mathrm{A}} = 0$ y $x_{\mathrm{B}} = 0$. Observando 2, vemos que $x_{\mathrm{CG}} = x_{\mathrm{B}} + \frac{L}{2}\sin\varphi$ y que $y_{\mathrm{CG}} = y_{\mathrm{A}} + \frac{L}{2}\cos\varphi$, mientras que $x_{\mathrm{A}} = x_{\mathrm{B}} + L\sin\varphi$ y $y_{\mathrm{B}} = y_{\mathrm{A}} + L\cos\varphi$. Es decir,

$$x_{\mathrm{CG}} = \frac{L}{2}\sin\varphi \quad (2)$$

$$y_{\mathrm{CG}} = \frac{L}{2}\cos\varphi \quad (3)$$

Observamos que $\sqrt{x_{\mathrm{CG}}^2 + y_{\mathrm{CG}}^2} = L/2$, es decir, el centro de gravedad se mueve en una trayectoria circular de radio $L/2$ centrada en el origen (véase la trayectoria de puntos en la figura 1). A continuación, derivamos (2) y (3) para obtener la relación entre las velocidades.

$$v_x = \dot{x}_{\mathrm{CG}} = \frac{L}{2}\omega \cos\varphi \tag{4}$$

$$v_y = \dot{y}_{\mathrm{CG}} = -\frac{L}{2}\omega \sin\varphi \tag{5}$$

Finalmente, sustituimos (3), (4) y (5) en (1) para obtener la relación entre ω y φ:

$$E = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) + mgy_{\mathrm{CG}}$$

$$E = \frac{1}{2}\frac{1}{12}mL^2\omega^2 + \frac{1}{2}m\frac{L^2}{4}\omega^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + mg\frac{L}{2}\cos\varphi$$

$$E = \frac{1}{24}mL^2\omega^2 + \frac{1}{8}mL^2\omega^2 + mg\frac{L}{2}\cos\varphi$$

$$E(\varphi,\omega) = \frac{1}{6}mL^2\omega^2 + mg\frac{L}{2}\cos\varphi \tag{6}$$

Inicialmente, $\varphi(t_0) = \omega(t_0) = 0$ (asumimos una perturbación infinitesimal), luego $E(0,0) = mg\frac{L}{2}$. Igualando energías mecánicas:

$$E(\varphi,\omega) = \frac{1}{6}mL^2\omega^2 + mg\frac{L}{2}\cos\varphi = mg\frac{L}{2}$$

$$\omega^2 = \frac{3g}{L}(1 - \cos\varphi) \tag{7}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}(1 - \cos\varphi)} \tag{8}$$

Dado que $\omega = \dot{\varphi}$

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{3g}{L}(1 - \cos\varphi)} \tag{9}$$

Que es la ecuación diferencial para $\varphi(t)$ que caracteriza el movimiento del palo mientras está apoyado en la pared y el suelo. El siguiente objetivo es determinar hasta dónde es válida esta ecuación. Es decir, ¿hay algún momento en el que el palo deje de estar apoyado en la pared y/o el suelo? Para responder a esta pregunta, tenemos en cuenta que, si el palo está apoyado, la normal correspondiente debe de ser positiva. Las condiciones correspondientes son:

$$N_p \geq 0$$

$$N_s \geq 0$$

Para determinar la expresión de ambas normales, aplicamos la segunda ley de Newton:

$$\sum F_x = m\dot{v}_x$$
$$\sum F_y = m\dot{v}_y$$

$$N_p = m\frac{d}{dt}\left(\frac{L}{2}\omega\cos\varphi\right) = m\frac{L}{2}(\dot{\omega}\cos\varphi - \omega^2\sin\varphi)$$

$$N_s - mg = m\frac{d}{dt}\left(-\frac{L}{2}\omega\sin\varphi\right) = -m\frac{L}{2}(\dot{\omega}\sin\varphi + \omega^2\cos\varphi)$$

Derivamos 7 para obtener $\dot{\omega}$:

$$2\omega\dot{\omega} = \frac{3g}{L}\omega\sin\varphi$$
$$\dot{\omega} = \frac{3g}{2L}\sin\varphi \tag{10}$$

Sustituyendo 7 y 10 en las expresiones de las normales llegamos a:

$$N_p = \frac{3mg}{2}\sin\varphi\left(\frac{3}{2}\cos\varphi - 1\right)$$
$$N_s = mg\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\sin^2\varphi + 3\cos\varphi(1-\cos\varphi)\right)\right]$$

Queremos estudiar si estas cantidades son positivas para $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (el rango entre la posición inicial y en el momento en el que, como tarde, toca el suelo durante la fase en que está apoyado). Para estos valores de φ, $\sin\varphi \in [0,1]$ y $\cos\varphi \in [0,1]$. Como consecuencia, vemos que N_p es positiva hasta que $\cos\varphi = \frac{2}{3}$ y negativa a partir de ese ángulo. Como hemos argumentado, la normal tiene que ser positiva: por lo tanto, cuando $\cos\varphi = 2/3$ *el palo deja de estar apoyado en la pared.* A partir de entonces, el palo sólo está apoyado en el suelo.

La normal del suelo nunca se have negativa durante este tramo:

$$N_s = mg\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\sin^2\varphi + 3\cos\varphi(1-\cos\varphi)\right)\right] = mg\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}(1-\cos^2\varphi) + 3\cos\varphi(1-\cos\varphi)\right)\right] =$$
$$= mg\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + 3\cos\varphi\left(1 - \frac{3}{2}\cos\varphi\right)\right)\right]$$

Derivando $3\cos\varphi\left(1 - \frac{3}{2}\cos\varphi\right)$ identificamos que el máximo de este término se alcanza cuando $3\cos\varphi = 1$ y que vale $1/2$; por lo tanto, como $1/2(3/2 + 1/2) \leq 1$, $N_s \geq 0$

3.2. Desprendimiento

A partir del momento en el que cesa el contacto con la pared, *no existe ninguna componente en en el eje x de ninguna fuerza actuando sobre el palo*, ya que la normal de la pared deja de actuar. Ello implica que no existe aceleración en este eje, luego *la velocidad en el eje x es constante.* De hecho, ¡podríamos haber concluido esto desde el principio![4] Si inicialmente existe una normal de la pared no nula, el palo acelera en el eje x. Ello implica que la velocidad horizontal se incrementa hasta que el palo deja de hacer contacto con la pared.

Calculemos v_x: dado que $\cos\varphi = 2/3$ en el momento del desprendimiento, entonces $\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}(1-\cos\varphi)} = \sqrt{\frac{g}{L}}$. Conocida ω, podemos obtener finalmente la respuesta al desafío aplicando (4):

$$v_x = \frac{L}{2}\omega\cos\varphi = \frac{1}{3}\sqrt{gL}$$

El palo seguirá ahora rebotando mientras desliza hacia adelante e intercambiando energía potencial con energía cinética de rotación y traslación, pero la componente horizontal de la velocidad del centro del palo se mantendrá constante.

[4]Sin recurrir a razonamientos del tipo “lo pone en el enunciado”, claro