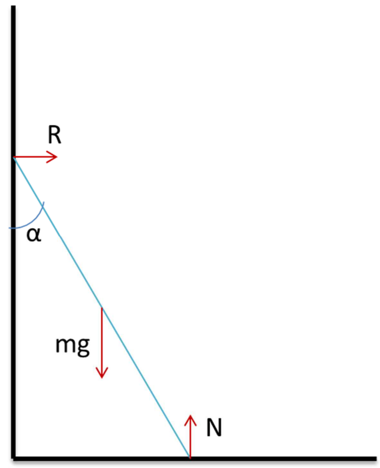

Estamos ante un claro problema de dinámica del sólido rígido: Dinámica porque el palo es deslizante (hay movimiento) y sólido rígido porque el palo es en principio indeformable.

Para resolverlo primero planteamos las ecuaciones de resultante de fuerzas y de momento resultante:

Las dos ecuaciones para las resultantes de fuerzas en las coordenadas x e y respectivamente mientras los extremos del palo sigan apoyados son:

$$R = ma_x$$

$$N - mg = ma_y$$

Y la ecuación del momento resultante tomado desde el centro de masas del palo (en dirección z, saliente del papel)

$$\frac{L}{2} N \sin\alpha - \frac{L}{2} R \cos\alpha = I \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}$$

Para nuestro cometido de obtener la velocidad terminal de desplazamiento del centro de masas en la dirección horizontal tenemos que tener en cuenta las variaciones que esta sufre desde el inicio de la experiencia, donde sabemos que es nula, hasta el instante en que la aceleración lineal en la dirección horizontal sea nula donde ya alcanzará su valor final. Este instante final, examinando la primera ecuación, acontece cuando el palo deja de apoyarse en la pared por tanto estamos interesados en averiguar en qué condiciones sucede eso.

En el sistema de 3 ecuaciones planteadas tenemos 6 incógnitas por tanto necesitamos seguir añadiendo restricciones para poder llegar a una solución.

Para ello, examinamos el dibujo ilustrativo del problema e intentamos buscar una relación entre las coordenadas del centro de masas del palo y el ángulo de apoyo del palo contra la pared. Si nos fijamos, en el instante inicial, dichas coordenadas se pueden expresar como:

$$x = \frac{L}{2} \sin\alpha$$

$$y = \frac{L}{2}\cos\alpha$$

Expresiones que seguirán siendo válidas mientras ambos extremos sigan en contacto con suelo y pared respectivamente.

Derivando una vez respecto del tiempo obtendremos la velocidad de traslación del centro de masas para ambas coordenadas:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{L}{2}\cos\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial t}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{L}{2}\sin\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial t}$$

Y derivando una segunda vez, obtendremos la aceleración del centro de masas:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{L}{2}\left(-\sin\alpha\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2 + \cos\alpha\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{L}{2}\left(\cos\alpha\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2 + \sin\alpha\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}\right)$$

En este momento hemos conseguido establecer una relación entre los parámetros del movimiento de traslación (posición, velocidad y aceleración del centro de masas) y el de rotación (ángulo de apoyo, velocidad angular de la rotación y aceleración angular de la misma).

El siguiente paso es sustituir estas dos últimas ecuaciones en las de la resultante de fuerzas:

$$R = m\frac{L}{2}\left(-\sin\alpha\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2 + \cos\alpha\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}\right)$$

$$N = mg - m\frac{L}{2}\left(\cos\alpha\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2 + \sin\alpha\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}\right)$$

Y acto seguido sustituimos estas reacciones expresadas en parámetros de la rotación en la ecuación del momento:

$$I\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2} = \frac{L}{2}\sin\alpha\left(mg - m\frac{L}{2}\left(\cos\alpha\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2 + \sin\alpha\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}\right)\right) - \frac{L}{2}\cos\alpha\left(m\frac{L}{2}\left(-\sin\alpha\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2 + \cos\alpha\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}\right)\right)$$

Operando y agrupando términos obtenemos que la aceleración angular del palo es directamente proporcional al seno del ángulo con el que se apoya en la pared.

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}\left(I + m\frac{L^2}{4}\right) = \frac{L}{2}mg\sin\alpha$$

En este momento, el sistema original de 3 ecuaciones original ya sólo presenta 5 incógnitas.

Necesitamos añadir dos restricciones más. La primera restricción, que la reacción de la pared sea nula:

$$R = m\frac{L}{2}\left(-\sin\alpha\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2 + \cos\alpha\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}\right) = 0$$

$$\cos\alpha\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2} = \sin\alpha\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2$$

Despejando la aceleración angular y sustituyendo en la nueva ecuación del momento:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2\left(I + m\frac{L^2}{4}\right) = \frac{L}{2}mg\sin\alpha$$

Simplificando y agrupando obtenemos una expresión que relaciona la velocidad angular de rotación con del ángulo de apoyo en la pared:

$$\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2 = \frac{\frac{L}{2}mg\cos\alpha}{\left(I + m\frac{L^2}{4}\right)}$$

Aún necesitamos una última restricción. Si revisamos el enunciado del problema se nos dice que no hay fuerzas de rozamiento lo que quiere decir que todos los movimientos se están llevando a cabo por la acción de un campo de fuerzas conservativo.

Esto se traduce, dadas las transformaciones de energía posibles en el problema, en que la suma de incrementos de energía cinética y potencial sea nulo entre dos instantes cualesquiera.

El incremento de energía potencial se deberá a los cambios en la altura del centro de masas del palo.

$$\Delta E_p = mg\Delta y$$

El incremento de energía cinética tiene que tener en cuenta dos tipos de contribuciones ya que no estamos tratando con una masa puntual.

La primera, el incremento en la energía cinética de traslación:

$$\Delta E_{c,t} = \frac{1}{2}m\left(v_f^2 - v_i^2\right)$$

La segunda, el incremento en la energía cinética de rotación:

$$\Delta E_{c,r} = \frac{1}{2}I\left(\omega_f^2 - \omega_i^2\right)$$

Por el principio de conservación de la energía:

$$\Delta E_p + \Delta E_{c,t} + \Delta E_{c,r} = 0$$

Para el caso que nos ocupa donde las velocidades iniciales tanto de rotación como traslación son nulas:

$$\frac{L}{2}mg(\cos\alpha - 1) + \frac{1}{2}m\left(\left(\frac{L}{2}\cos\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\sin\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2\right) + \frac{1}{2}I\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2 = 0$$

Operando y agrupando términos con velocidad angular al cuadrado:

$$\frac{L}{2}mg(1 - \cos\alpha) = \frac{1}{2}m\frac{L^2}{4}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2$$

$$Lmg(1 - \cos\alpha) = \left(I + m\frac{L^2}{4}\right)\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2$$

Sustituyendo la expresión que obtuvimos que relacionaba la velocidad angular con el ángulo de apoyo para el instante de separación de la pared:

$$Lmg(1 - \cos\alpha) = \left(I + m\frac{L^2}{4}\right)\frac{\frac{L}{2}mg\cos\alpha}{\left(I + m\frac{L^2}{4}\right)}$$

Simplificando términos:

$$(1 - \cos\alpha) = \frac{1}{2}\cos\alpha$$

Despejando:

$$\cos\alpha = \frac{2}{3}$$

Es decir que cuando la separación sea de unos 48,19º aproximadamente el palo perderá contacto con la pared.

Si volvemos a la expresión de la velocidad lineal en la dirección x y evaluamos, teniendo en cuenta que el momento de inercia de un palo es $I = \frac{mL^2}{12}$ respecto a dicho eje de giro:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{L}{2}\cos\alpha\sqrt{\frac{\frac{L}{2}mg\cos\alpha}{\left(I + m\frac{L^2}{4}\right)}}$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{L}{3}\sqrt{\frac{\frac{1}{3}g}{L\left(\frac{4}{12}\right)}}$$

Obteniendo finalmente que la velocidad terminal horizontal será si no he cometido algún error de cálculo en el desarrollo:

$$\frac{1}{3}\sqrt{gL}$$