Desafíos - Los koalindres colgantes

Solución de Álvaro González Molinillo

Antes que nada, voy a resolver varios ejemplos con un número determinado de poleas. Después obtendremos una ecuación genérica para n poleas y al final, calcularemos el resultado, utilizado límites, cuando el número de poleas tienda a infinito.

Máquina de Atwood con 2 poleas

De la primera polea (que cuelga del techo) cuelga un koalindre de masa M y una segunda polea, de la cual cuelgan dos koalindres de masa M.

Sobre cada koalindre actúan dos fuerzas. La fuerza de la gravedad hacia abajo, y la fuerza que ejerce la cuerda a la que llamaremos tensión. Aplicando la segunda ley de Newton sabemos que el sumatorio de fuerzas que actúa sobre cada koalindre debe ser igual a la masa por su aceleración. Por tanto tenemos las siguientes ecuaciones.

Nota: tomaremos el eje y positivo hacia arriba

$$T_1 - Ma_1 = Mg \qquad a_1 = \frac{T_1 - Mg}{M}$$

$$T_2 - Ma_2 = Mg \qquad a_2 = \frac{T_2 - Mg}{M}$$

$$T_3 - Ma_3 = Mg \qquad a_3 = \frac{T_3 - Mg}{M}$$

También sabemos las relaciones entre las tensiones

$$T_1 = T_2 + T_3$$

y como $T_2 = T_3$, obtenemos $T_1 = 2T_2$ o lo que es lo mismo

$$T_2 = \frac{T_1}{2}$$

Ahora vamos a obtener la relación entre las aceleraciones que sufre cada koalindre.

Sabemos que la aceleración que sufre el primer koalindre a_1 es la opuesta a la aceleración que sufre la polea número 2 (de la cual cuelgan el koalindre 2 y 3) a la que llamaremos a_{p2}. Por tanto su suma vale cero.

$$a_1 + a_{p2} = 0$$

También sabemos que la aceleración que sufre el segundo koalindre es la opuesta a la que sufre el tercero dentro del sistema de referencia de la segunda polea acelerada. A estas aceleraciones les pondremos un superíndice para distinguirlas de las aceleraciones en el sistema de referencia de la primera polea.

$$a_2' + a_3' = 0$$

Para calcular las aceleraciones relativas al sistema de referencia de la primera polea, bastará con restarles la aceleración que sufre el segundo sistema.

$$a_2' = a_2 - a_{p2}$$
$$a_2' = a_2 + a_1$$

$$a_3' = a_3 - a_{p2}$$
$$a_3' = a_3 + a_1$$

Utilizando la expresión anterior podemos obtener la relación entre todas las aceleraciones en el sistema de referencia principal (el de la primera polea)

$$a_2' + a_3' = 0$$
$$a_2 + a_1 + a_3 + a_1 = 0$$

$$2a_1 + a_2 + a_3 = 0$$

Sustituyendo las aceleraciones por las expresiones calculadas al principio obtenemos

$$2\frac{T_1 - Mg}{M} + \frac{T_2 - Mg}{M} + \frac{T_3 - Mg}{M} = 0$$

$$2\frac{T_1 - Mg}{M} + \frac{\frac{T_1}{2} - Mg}{M} + \frac{\frac{T_1}{2} - Mg}{M} = 0$$

$$2T_1 - 2Mg + \frac{T_1}{2} - Mg + \frac{T_1}{2} - Mg = 0$$

$$3T_1 - 4Mg = 0$$

$T_1 = \frac{4}{3}Mg$

Sustituyendo en la ecuación de la aceleración en función de la tensión obtenemos

$a_1 = \frac{T_1 - Mg}{M} = \frac{\frac{4}{3}Mg - Mg}{M} = \frac{1}{3}g$

Por tanto la aceleración del primer koalindre será de un tercio la aceleración de la gravedad (hacia arriba)

$a_1 = \frac{1}{3}g$

Máquina de Atwood con 3 poleas

De la primera polea (que cuelga del techo) cuelga un koalindre de masa M y una segunda polea, de la cual cuelgan un koalindre de masa M y una tercera polea de la cual cuelgan dos koalindres de masa M.

No voy a detallar los procedimientos ya que son prácticamente los mismos.

Ecuaciones de aceleraciones que sufren los koalindres.

$T_1 - Ma_1 = Mg \qquad a_1 = \frac{T_1 - Mg}{M}$

$T_2 - Ma_2 = Mg \qquad a_2 = \frac{T_2 - Mg}{M}$

$T_3 - Ma_3 = Mg \qquad a_3 = \frac{T_3 - Mg}{M}$

$T_4 - Ma_4 = Mg \qquad a_4 = \frac{T_4 - Mg}{M}$

Relaciones entre las tensiones

$T_2 = \frac{T_1}{2}$
$T_3 = \frac{T_1}{4}$

Ahora vamos a obtener la relación entre las aceleraciones que sufre cada koalindre.

Sabemos que la aceleración que sufre el primer koalindre a_1 es la opuesta a la aceleración que sufre la polea número 2 (de la cual cuelgan el koalindre 2 y la polea 3) a la que llamaremos a_{p2} . Por tanto su suma vale cero.

$$a_1 + a_{p2} = 0$$

También sabemos que la aceleración que sufre el segundo koalindre es la opuesta a la que sufre el sistema de la tercera polea dentro del sistema de referencia de la segunda polea acelerada. A estas aceleraciones les pondremos un superíndice para distinguirlas de las aceleraciones en el sistema de referencia de la primera polea.

$$a_2' + a_{p3}' = 0$$

Por último, sabemos que la aceleración que sufre el tercer koalindre es la opuesta a la que sufre el cuarto koalindre dentro del sistema de referencia de la tercera polea.

$$a_3'' + a_4'' = 0$$

$$a_3'' = a_3' - a_{p3}'$$
$$a_3'' = a_3' + a_2'$$

$$a_4'' = a_4' - a_{p3}'$$
$$a_4'' = a_4' + a_2'$$

$$a_3' + a_2' + a_4' + a_2' = 0$$
$$2a_2' + a_3' + a_4' = 0$$

Ya tenemos las aceleraciones en el sistema de referencia de la segunda polea. Ahora solo falta calcular las aceleraciones en el sistema de referencia de la primera polea.

$$a_2' = a_2 - a_{p2} \qquad a_2' = a_2 + a_1$$
$$a_3' = a_3 - a_{p2} \qquad a_3' = a_3 + a_1$$
$$a_4' = a_4 - a_{p2} \qquad a_4' = a_4 + a_1$$

$$2a_2' + a_3' + a_4' = 0$$

$$2\,(a_2 + a_1) + a_3 + a_1 + a_4 + a_1 = 0$$
$$4a_1 + 2a_2 + a_3 + a_4 = 0$$

Sustituyendo las aceleraciones por las expresiones calculadas al principio obtenemos

$$4\,\frac{T_1 - Mg}{M} + 2\,\frac{T_2 - Mg}{M} + \frac{T_3 - Mg}{M} + \frac{T_4 - Mg}{M} = 0$$

$$4\,\frac{T_1 - Mg}{M} + 2\frac{\frac{T_1}{2} - Mg}{M} + \frac{\frac{T_1}{4} - Mg}{M} + \frac{\frac{T_1}{4} - Mg}{M} = 0$$

$$4T_1 - 4Mg + T_1 - 2Mg + \frac{T_1}{2} - 2Mg = 0$$

$$8T_1 - 8Mg + 2T_1 - 4Mg + T_1 - 4Mg = 0$$

$$11T_1 - 16Mg = 0$$

$$T_1 = \frac{16}{11}Mg$$

Sustituyendo en la ecuación de la aceleración en función de la tensión obtenemos

$$a_1 = \frac{T_1 - Mg}{M} = \frac{\frac{16}{11}Mg - Mg}{M} = \frac{5}{11}g$$

Por tanto la aceleración del primer koalindre será:

$$a_1 = \frac{5}{11}g = 0,4545g$$

Máquina de Atwood con n poleas

Siguiendo la dinámica anterior y sin entrar mucho en detalle, voy a escribir las ecuaciones para el caso genérico de n poleas.

Ecuación de la aceleración para el koalindre i-ésimo

$$T_i - Ma_i = Mg \qquad\qquad a_i = \frac{T_i - Mg}{M}$$

Ecuación de las tensiones en función de la tensión del primer koalindre

$$T_i = \frac{T_1}{2^{i-1}}$$

Relación entre las aceleraciones

$$a_{n+1} + \sum_{1}^{n} \left(2^{n-i} a_i\right) = 0$$

Nota: la aceleración a_{n+1} va fuera del sumatorio ya que no va multiplicada por ninguna potencia de 2. De todas formas cuando apliquemos límites nos dará igual.

Si aplicamos la ecuación de la aceleración obtenemos

$$\frac{T_{n+1} - Mg}{M} + \sum_{1}^{n} \left(2^{n-i} \frac{T_i - Mg}{M}\right) = 0$$

$$\frac{\frac{T_1}{2^{n-1}} - Mg}{M} + \sum_{1}^{n} \left(2^{n-i} \frac{\frac{T_1}{2^{i-1}} - Mg}{M}\right) = 0$$

Multiplicamos ambos lados de la ecuación por M

$$\frac{T_1}{2^{n-1}} - Mg + \sum_{1}^{n} \left(2^{n-i} \left(\frac{T_1}{2^{i-1}} - Mg\right)\right) = 0$$

Separamos el sumatorio en dos

$$\frac{T_1}{2^{n-1}} - Mg + \sum_{1}^{n} \left(2^{n-i} \frac{T_1}{2^{i-1}}\right) - \sum_{1}^{n} \left(2^{n-i} Mg\right) = 0$$

Sacamos factor común T_1 y Mg

$$T_1\left(\frac{1}{2^{n-1}}+\sum_1^n\left(\frac{2^{n-i}}{2^{i-1}}\right)\right)-Mg\left(\sum_1^n 2^{n-i}\right)=0$$

Resolviendo un poco más ya tenemos la expresión para la tensión T_1 en función de la masa del koalindre, de la aceleración de la gravedad y del número de poleas del sistema.

$$T_1=Mg\,\frac{\left(\sum_1^n 2^{n-i}\right)}{\left(\frac{1}{2^{n-1}}+\sum_1^n(2^{n-2i+1})\right)}$$

Si el sistema tuviera 4 poleas el resultado sería

$$T_1=\tfrac{64}{43}Mg$$

$$a_1=\tfrac{21}{43}g=0,4884g$$

Si el sistema tuviera 5 poleas el resultado sería

$$T_1=\tfrac{256}{171}Mg$$

$$a_1=\tfrac{85}{171}g=0,4971g$$

Como podemos observar, el resultado parece que tiende a $0,5g$

Vamos a comprobarlo.

Máquina de Atwood con infinitas poleas

Para calcular la aceleración del primer koalindre en un sistema de infinitas poleas, vamos a calcular su tensión mediante la fórmula anterior, aplicando límites, cuando el número de poleas tiende a infinito.

Antes que nada, vamos a dividir por 2^n en el numerador y en el denominador

$$T_1 = Mg \frac{\left(\sum_1^n 2^{-i}\right)}{\left(\frac{1}{2^{2n-1}} + \sum_1^n (2^{-2i+1})\right)}$$

Ahora calculamos el límite

$$T_1 = \lim_{n\to\infty} Mg \frac{\left(\sum_1^n 2^{-i}\right)}{\left(\frac{1}{2^{2n-1}} + \sum_1^n (2^{-2i+1})\right)}$$

El numerador se convierte en la suma de una serie geométrica de primer elemento $\frac{1}{2}$ y de razón $\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$

Una serie geométrica converge si y solo si su razón es menor que 1. Aquí vale un medio, por tanto es covergente y su suma vale

$S = \frac{a}{1-r}$ Siendo a el primer elemento y r la razón

$$S = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

Por tanto el numerador tiende a 1 cuando n tiende a infinito.

Vamos con el denominador. El primer sumando $\frac{1}{2^{2n-1}}$ claramente tiende a 0. El segundo sumando $\sum_1^n \left(2^{-2i+1}\right)$ tiende a convertirse en una serie geométrica de esta forma

$\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \ldots$

Serie geométrica de primer elemento $\frac{1}{2}$ y de razón $\frac{1}{4}$, por tanto su suma vale

$$S = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$$

Por tanto el límite vale

$$T_1 = \lim_{n \to \infty} Mg \frac{\left(\sum_1^n 2^{-i}\right)}{\left(\frac{1}{2^{2n-1}} + \sum_1^n (2^{-2i+1})\right)} = \frac{1}{\frac{2}{3}} Mg = \frac{3}{2} Mg$$

Ya solo queda calcular la aceleración

$$a_1 = \frac{T_1 - Mg}{M} = \frac{\frac{3}{2}Mg - Mg}{M} = \frac{1}{2} g$$

<u>Solución</u>

$$a_1 = \frac{1}{2} g$$