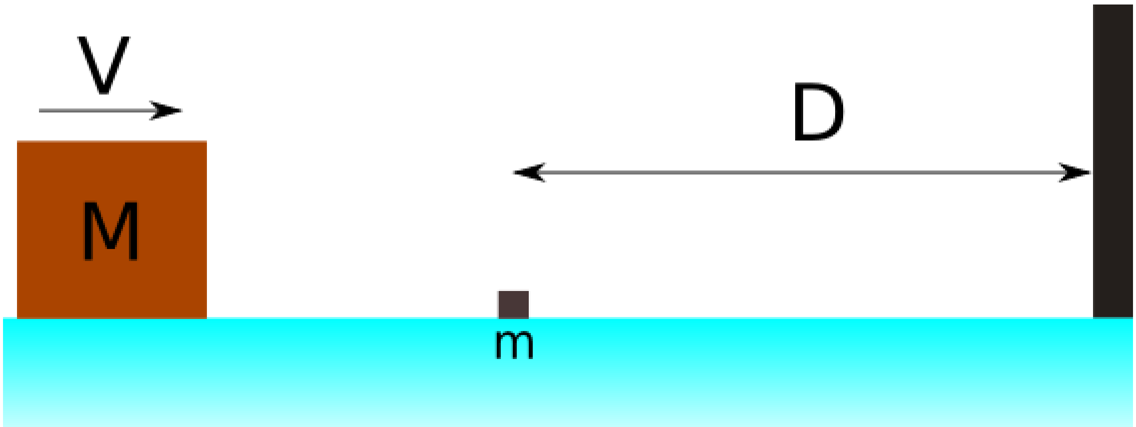
EL FRONTÓN CHIRIPITIPITI



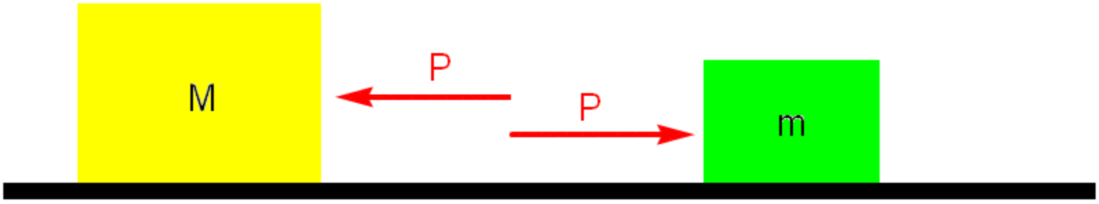
Se tiene un bloque de masa M con velocidad inicial V y otro de masa m con velocidad v, que en el instante inicial es nula, cuya distancia a la pared en el instante inicial es D. El bloque M golpea al m y éste choca con una pared y retrocede para volver a golpear al M. Se toma como positivo el movimiento hacia la derecha. La energía se conserva a lo largo de todo el movimiento.

Hay que resolver V y v en función de n, número de veces que los bloques se golpean entre sí, y la distancia a la que se encuentran los bloques de la pared en cada momento en que se golpean.

Demostrar que la distancia a la pared a la que el bloque M se detiene y el número de choques realizado en ese instante no dependen de la velocidad inicial.

CÁLCULO DE LAS VELOCIDADES

En los choques, los bloques reciben percusiones –P, para M, y P, para m, de igual módulo.



Las percusiones siguen el siguiente modelo

$$\sum P = \Delta mv$$

Aplicando eso a cada bloque se tiene

$$P = m(v_f - v_i)$$
$$-P = M(V_f - V_i)$$

Eliminando P de las ecuaciones y teniendo en cuenta que se conserva la energía, se tienen dos ecuaciones.

$$M(V_f - V_i) = m(v_i - v_f)$$
$$MV_f^2 + mv_f^2 = MV_i^2 + mv_i^2$$

Despejando las velocidades finales se tiene

$$V_f = \frac{2v_i m - V_i(m-M)}{m+M}$$

$$v_f = \frac{2V_i M + v_i(m-M)}{m+M}$$

El choque del bloque m con el muro cambia el sentido de su velocidad, pero no su módulo. Entonces, la velocidad inicial del bloque m de un choque n+1 es la velocidad final del choque n multiplicada por -1 y para el bloque M análogamente, pero sin multiplicar por -1.

Se va a considerar la velocidad final del bloque m después de haber chocado con la pared.

$$v_f = -\frac{2V_i M + v_i(m-M)}{m+M}$$

Se define el vector $\overline{V_n} = \begin{pmatrix} V_n \\ v_n \end{pmatrix}$ donde n es el número del choque al que corresponden esas velocidades.

Poniendo las ecuaciones de forma matricial

$$\begin{pmatrix} V_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-m+M}{m+M} & \dfrac{2m}{m+M} \\ \dfrac{-2M}{m+M} & \dfrac{-m+M}{m+M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

O lo que es igual

$$\overline{V_{n+1}} = A\overline{V_n}$$

Se cumple que

$$\overline{V_1} = A\overline{V_0} \; ; \; \overline{V_2} = A\overline{V_1} = A^2\overline{V_0}$$

Entonces $$\overline{V_n} = A^n\overline{V_0}$$

Donde el subíndice 0 se refiere a las condiciones iniciales.

Como elevar una matriz a un número entero desconocido n es muy complicado, se va a descomponer A en

$$A = PDP^{-1}$$

Donde D es una matriz diagonal formada por sus autovalores y P es una matriz con sus autovectores en columnas.

Como al multiplicar una matriz por su inversa se obtiene la matriz unidad, al elevar A a un número pasa lo siguiente

$$A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$$

Entonces

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

Como para elevar a n una matriz diagonal simplemente hay que elevar a n sus componentes, se ha pasado de tener que elevar a n una matriz a tener que hacerlo sólo con dos números.

Para calcular los autovalores λ de una matriz se hace

$$Det(A - \lambda I) = 0$$

donde I es la matriz unidad $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Y el determinante de una matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es $ad - cb$

Resolviendo la ecuación se tiene

$$\lambda_1 = -\frac{2\sqrt{M}\sqrt{-m} - M + m}{M + m}$$
$$\lambda_2 = \frac{2\sqrt{M}\sqrt{-m} + M - m}{M + m}$$

Para calcular un autovector asociado a un autovalor se hace

$$(A - \lambda_i I)u_i = 0$$

Y sale

$$u_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{-m}}{\sqrt{M}} \\ -1 \end{pmatrix} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{-m}}{\sqrt{M}} \\ -1 \end{pmatrix}$$

La inversa de una matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{b}{bc-ad} \\ \frac{c}{bc-ad} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$

Aplicando todo lo anterior se llega a

$$\begin{pmatrix} V_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{-m}}{\sqrt{M}} & \frac{\sqrt{-m}}{\sqrt{M}} \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-\frac{2\sqrt{M}\sqrt{-m} - M + m}{M + m})^n & 0 \\ 0 & (\frac{2\sqrt{M}\sqrt{-m} + M - m}{M + m})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{0.5\sqrt{M}}{\sqrt{-m}} & -0.5 \\ \frac{0.5\sqrt{M}}{\sqrt{-m}} & -0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Y multiplicando sale

$$V_n = \frac{0.5V_0\left[\left(M-m-2\sqrt{M}\sqrt{-m}\right)^n + \left(M-m+2\sqrt{M}\sqrt{-m}\right)^n\right]}{(M+m)^n}$$

$$v_n = \frac{0.5V_0\sqrt{M}\left[\left(M-m-2\sqrt{M}\sqrt{-m}\right)^n - \left(M-m+2\sqrt{M}\sqrt{-m}\right)^n\right]}{\sqrt{-m}(M+m)^n}$$

Para simplificar V se Tiene en cuenta que

$$\frac{-a+ib}{a+ib} = \frac{-a^2+b^2+2iab}{a^2+b^2}$$

$$\frac{a+ib}{-a+ib} = \frac{-a^2+b^2-2iab}{a^2+b^2}$$

Si $a=\sqrt{m}$ y $b=\sqrt{M}$ se tiene

$$V_n = V_0\frac{\left(\frac{i\sqrt{M}-\sqrt{m}}{i\sqrt{M}+\sqrt{m}}\right)^n + \left(\frac{i\sqrt{M}+\sqrt{m}}{i\sqrt{M}-\sqrt{m}}\right)^n}{2}$$

O lo que es lo mismo

$$V_n = V_0\frac{e^{iinLn\left(\frac{i+\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{M}}}{i-\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{M}}}\right)} + e^{-iinLn\left(\frac{i+\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{M}}}{i-\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{M}}}\right)}}{2}$$

Como

$$Cos(z)=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

Entonces

$$V_n=V_0Cos(inLn\left(\frac{i+\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{M}}}{i-\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{M}}}\right))$$

Como

$$\text{Arctan}(z)=\frac{i}{2}Ln(\frac{i+z}{i-z})$$

Finalmente queda

$$V_n=V_0Cos(2n\,\text{Arctan}(\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{M}}))$$

Para simplificar v se sigue un proceso similar

$$\frac{-a+ib}{a+ib}=\frac{-a^2+b^2+2iab}{a^2+b^2}$$

$$\frac{a+ib}{-a+ib}=\frac{-a^2+b^2-2iab}{a^2+b^2}$$

Si $a=\sqrt{m}$ y $b=\sqrt{M}$ se tiene

$$v_n = V_0 \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{m}} \frac{-\left(\frac{i\sqrt{M}-\sqrt{m}}{i\sqrt{M}+\sqrt{m}}\right)^n + \left(\frac{i\sqrt{M}+\sqrt{m}}{i\sqrt{M}-\sqrt{m}}\right)^n}{2i}$$

O lo que es lo mismo

$$v_n = V_0 \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{m}} \frac{-e^{iinLn\left(\frac{i+\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{M}}}{i-\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{M}}}\right)} + e^{-iinLn\left(\frac{i+\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{M}}}{i-\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{M}}}\right)}}{2i}$$

Como

$$Sen(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

Entonces

$$v_n = -V_0 \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{m}} Sen(inLn\left(\frac{i+\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{M}}}{i-\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{M}}}\right))$$

Como

$$\mathrm{Arctan}(z) = \frac{i}{2} Ln(\frac{i+z}{i-z})$$

Finalmente queda

$$v_n = -\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{m}} V_0 Sen(2n \operatorname{Arctan}(\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{M}}))$$

Como M>>m se puede poner que

$$\operatorname{Arctan}(\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{M}}) \approx \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{M}}$$

Entonces se tiene

$$V_n = V_0 Cos(2n \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{M}})$$

$$v_n = -\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{m}} V_0 Sen(2n \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{M}})$$

El coseno y el seno se podrían simplificar de una forma similar, pero como n puede ser muy grande, no se debería hacer.

CÁLCULO DE n

Para sacar la n en la que V=0 simplemente hay que despejar. Se usan las ecuaciones en las que no se ha simplificado el Arctan para conseguir el resultado exacto y, una vez obtenido, se simplifica si es necesario.

$$n=\frac{K\pi}{4\operatorname{Arctan}(\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{M}})}$$

Donde K es un número entero impar. Se elige K=1 porque si K es negativo n también lo es.

Para descartar K=3 o mayor se busca el máximo n para el que tienen lugar los choques.

Si V=v, los bloques no pueden llegar a golpearse, así que si

$$V_0Cos(2n\operatorname{Arctan}(\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{M}}))=-\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{m}}V_0Sen(2n\operatorname{Arctan}(\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{M}}))$$

La solución de la ecuación es

$$n=\frac{C\pi}{2\operatorname{Arctan}(\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{M}})}-\frac{1}{2}$$

Donde C es un número entero. Se toma C=1 porque si es negativo, n también lo es y no puede ser C>1 porque cuando C=1 ya no se pueden producir más choques.

Si elegimos K=3

$$\frac{3\pi}{4\operatorname{Arctan}(\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{M}})}>\frac{\pi}{2\operatorname{Arctan}(\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{M}})}-\frac{1}{2}$$

Esto se cumple porque operando queda

$$\frac{\pi}{4\,\mathrm{Arctan}(\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{M}})} > -\frac{1}{2}$$

Y Arctan(x) es positivo siempre que x lo sea, así que el término de la izquierda es mayor que 0 y el n correspondiente a K=3 nunca se llega a alcanzar.

Entonces el resultado es

$$n = \frac{\pi}{4\,\mathrm{Arctan}(\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{M}})}$$

Que, igual que antes se puede simplificar haciendo

$$\mathrm{Arctan}(\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{M}}) \approx \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{M}}$$

Y sale

$$n = \frac{\pi}{4\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{M}}}$$

El n al que M se para no es, en general, entero. Esto ocurre porque el bloque, en realidad, nunca se para. Para la parte entera de n, M tiene la menor velocidad positiva y para la parte entera de n+1 tiene la velocidad negativa de menor módulo

CÁLCULO DE LA DISTANCIA

Si D_n es la distancia desde el punto donde se produce el choque n+1 hasta la pared, por ejemplo, D_0 es la distancia inicial, en la cual se produce el choque 1.

El tiempo entre los choques n+1 y n+2 es

$$t = \frac{D_n + D_{n+1}}{\left|v_{n+1}\right|}$$

Y la distancia que recorre M en ese tiempo es

$$D_n' = V_{n+1} t$$

Entonces la distancia a la que se produce el choque n+2 es

$$D_{n+1} = D_n - D_n'$$

Sustituyendo queda

$$D_{n+1} = D_n - V_{n+1} \frac{D_n + D_{n+1}}{\left|v_{n+1}\right|}$$

Despejando

$$D_{n+1} = \frac{\left|v_{n+1}\right| - V_{n+1}}{\left|v_{n+1}\right| + V_{n+1}} D_n$$

Se cumple que

$$D_1 = \frac{|v_1| - V_1}{|v_1| + V_1} D_0$$

$$D_2 = \frac{|v_2| - V_2}{|v_2| + V_2} D_1 = \frac{|v_2| - V_2}{|v_2| + V_2} \frac{|v_1| - V_1}{|v_1| + V_1} D_0$$

Entonces

$$D_n = \prod_{i=1}^{n} \frac{|v_i| - V_i}{|v_i| + V_i} D_0$$

Que no depende de la velocidad inicial porque V y v dependen linealmente de esta y al hacer la división desaparece, por lo tanto, para unas masas y distancia inicial dadas, para cualquier velocidad inicial, todos los choques se producen a la misma distancia de la pared.

Si se llama w a la parte entera de la n para que V se anule se define

Distancia con V>0 de menor módulo (V_w): D_{w-1}

Distancia con V<0 de menor modulo (V_{w+1}) y minima distancia al muro: D_w

La distancia al muro empieza a aumentar a partir de D_{w+1}

La expresión del productorio D_w es muy difícil de evaluar, así que aprovechando que M>>m se puede simplificar.

Si x>0 se cumple que

$$Sen(\mathrm{Arctan}(\sqrt{x})) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$$

$$Cos(\mathrm{Arctan}(\sqrt{x})) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

Entonces, si m/M tiende a 0

$$V_0 Cos(\mathrm{Arctan}(2n\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{M}})) \to V_0 Cos(2n\,\mathrm{Arctan}(\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{M}}))$$

$$-\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{m}}V_0 Sen(\mathrm{Arctan}(2n\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{M}})) \to -\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{m}}V_0 Sen(2n\,\mathrm{Arctan}(\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{M}}))$$

Cuidado, estos valores son muy diferentes incluso para valores pequeños de m/M, pero al dividirlos en la fórmula de D, queda un resultado muy parecido para intervalos determinados de n.

De esta manera, quedaría

$$\left|v_n\right| = V_0 \frac{2n}{\sqrt{4n^2\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{M}}+1}}$$

$$V_n = V_0 \frac{1}{\sqrt{4n^2\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{M}}+1}}$$

$$D_n = \prod_{i=1}^{n}\frac{2i-1}{2i+1}D_0$$

Que es

$$D_n = \frac{1}{2n+1}D_0$$

A pesar de no depender de las masas, esta fórmula funciona muy bien para $\frac{m}{M} \approx 10^{-6}$ o menor.

Entonces, si E(x) es la parte entera de x, la mínima distancia al muro es

$$D_w = \frac{1}{2E\left(\dfrac{\pi}{4\dfrac{\sqrt{m}}{\sqrt{M}}}\right)+1} D_0$$