El frontón chiripitipiti
Una solución alternativa

http://eltamiz.com

9 de noviembre de 2011

2. Número de choques.

Según se producen choques entre el bloque grande y el pequeño, el bloque pequeño va robando energía al grande, hasta que se la ha quedado toda como vimos en la primera parte. Al principio, hay choques separados un tiempo razonable y el bloque pequeño va tomando más y más velocidad. Según pasa el tiempo y el bloque pequeño se mueve más y más rápido, y según el bloque grande se acerca más y más a la pared, el número de choques por segundo irá aumentando hasta ser también muy grande.

Esto significa varias cosas: en primer lugar, que la inmensa mayoría de los choques se producen muy cerca del final del proceso, y que cerca de ese final el tiempo entre choque y choque es muy pequeño, tanto por la cercanía del bloque grande a la pared como por la gran velocidad del bloque pequeño. Esto nos permite realizar varias simplificaciones para obtener una buena aproximación del número total de choques n.

Nuestro objetivo es obtener una función $n(V')$ que modele bien el número de choques en función de la velocidad del bloque grande durante esa parte final del proceso, que es donde se produce la gran mayoría de los choques. Por tanto, queremos poner todo en función de V', la velocidad del bloque grande (pongo la coma para distinguir la velocidad del bloque grande durante el proceso de la velocidad inicial V), y trataremos $n(V')$ como si fuera una función continua en vez de un número entero: esto significa, entre otras cosas, que ignoraremos decimales en n, pero dado que es un número enorme, el error relativo es minúsculo.

Utilizando la conservación de la energía, como hicimos en la primera parte de la solución, podemos obtener $v(V')$:

$$MV^2 = MV'^2 + mv^2 \implies v = V\sqrt{\frac{M(V^2 - V'^2)}{mV^2}}$$

Durante el período de tiempo que estamos estudiando, cuando hay muchos choques en un tiempo muy corto, en cada choque el bloque grande pierde un poco de su velocidad, con lo que sufre un diferencial de momento lineal

$$dP = MdV'$$

El pequeño a su vez choca con el grande y se vuelve por donde vino sin apenas modificar su velocidad v, pues el grande casi se ha parado, con lo que el bloque pequeño sufre un diferencial de momento lineal (viniendo con velocidad v hacia la izquierda y volviendo a irse hacia la derecha con velocidad v)

$$dp = 2mv$$

Con lo que, dado que $dP + dp = 0$,

$$MdV' = -2mv = -2mV\sqrt{\frac{M(V^2 - V'^2)}{mV^2}}$$

Podemos dejarlo algo más presentable dividiendo por V^2 dentro de la raíz,

$$MdV' = -2mV\sqrt{\frac{M(1 - \frac{V'}{V}^2)}{m}}$$

En dn choques,

$$MdV' = -2mV\sqrt{\frac{M(1 - \frac{V'}{V}^2)}{m}}dn$$

De donde podemos obtener

$$dn = -\frac{M}{2mV}\sqrt{\frac{m}{M(1 - \frac{V'}{V}^2)}}dV' = -\frac{1}{2V}\sqrt{\frac{M}{m(1 - \frac{V'}{V}^2)}}dV'$$

Integrando entre $V' = V$ y $V' = 0$ (pues el bloque grande termina parado), obtenemos el valor final de n:

$$n = -\frac{1}{2V}\int_V^0 \sqrt{\frac{M}{m(1 - \frac{V'}{V}^2)}}dV'$$

Para integrar podemos hacer el cambio de variable $q = \frac{V'}{V}$, con lo que $dV' = Vdq$ y los límites de integración son 1 y 0 (o al revés si cambiamos de signo):

$$n = -\frac{1}{2}\int_1^0 \sqrt{\frac{M}{m(1 - q^2)}}dq = \frac{1}{2V}\sqrt{\frac{M}{m}}\int_0^1 \sqrt{\frac{1}{1 - q^2}}dq$$

Podemos hacer más fácil la integral con un nuevo cambio de variable (sí, sí, ya lo sé, un horror), $q = \operatorname{sen}\alpha$, con lo que $dq = \cos\alpha d\alpha$ y los límites de integración son 0 y $\frac{\pi}{2}$:

$$n = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{M}{m}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}\alpha^2}}d\alpha$$

Pero $\sqrt{1 - \operatorname{sen}\alpha^2} = \cos\alpha$, con lo que nos queda algo mucho menos horrible:

$$n = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{M}{m}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\alpha$$

Es decir, el resultado final:

$$n = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{M}{m}}\frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{M}{m}}}$$