El frontón chiripitipiti
Una solución alternativa

http://eltamiz.com

11 de noviembre de 2011

1. Distancia a la pared.

Los choques entre el bloque grande y el pequeño son elásticos, con lo que se conservan tanto la cantidad de movimiento como la energía cinética. En los choques entre el bloque pequeño y la pared se conserva también la energía cinética.

Por lo tanto, dado que la energía se conserva, la energía en el instante inicial debe ser igual a la energía cuando el bloque grande se para. Inicialmente sólo se mueve el bloque grande, y al final sólo se mueve el pequeño (pues queremos calcular dónde se para el grande), con lo que tenemos

$$\frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

Por lo tanto, aunque no sea lo que queremos calcular, sabemos la velocidad final del bloque pequeño, cuando le haya robado"toda la energía cinética al grande:

$$v = V\sqrt{\frac{M}{m}} \tag{1.1}$$

Pero claro, con eso no nos vale. Sigamos por otro lado. Para simplificar cálculos, utilicemos subíndices i para señalar "tras el choque i"; así, V_i es la velocidad del bloque grande tras el choque i, v_i la del pequeño y D_i la distancia a la pared.

Si el choque i se produce a D_i metros de la pared, el siguiente se producirá cuando el bloque grande haya recorrido $V_i t$ metros y el pequeño $v_i t$ metros. Sin embargo, como es el siguiente choque, la suma de esas dos distancias debe ser igual a dos veces la distancia a la pared, $2D_i$ metros (el camino de ida más el de vuelta):

$$V_i t + v_i t = 2D_i$$

De donde podemos conocer el tiempo entre un choque y el siguiente,

$$t = \frac{2D_i}{V_i + v_i}$$

Y así podemos conocer la distancia a la pared en el siguiente choque, D_{i+1}, puesto que será igual a la distancia anterior, D_i, menos lo que haya recorrido el bloque grande en el tiempo t que acabamos de calcular:

$$D_{i+1} = D_i - V_i t = D_i - \frac{2D_iV_i}{V_i+v_i} = \frac{D_iv_i - D_iV_i}{V_i+v_i}$$

Sacando factor común D_i,

$$D_{i+1} = D_i\frac{v_i - V_i}{v_i + V_i} \implies D_{i+1}(v_i + V_i) = D_i(v_i - V_i) \tag{1.2}$$

Sin embargo, podemos hacer algo más: obtener la relación entre las velocidades antes y después de cada choque. En cualquier choque, como hemos dicho al principio, se conservan cantidad de movimiento y energía cinética. Respecto a la energía,

$$\frac{1}{2}MV_i^2 + \frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}MV_{i+1}^2 + \frac{1}{2}mv_{i+1}^2$$

Multiplicamos por dos y reagupamos un poco:

$$M(V_{i+1}^2 - V_i^2) = m(v_i^2 - v_{i+1}^2)$$

Podemos incluso dejarlo algo más bonito:

$$M(V_{i+1} - V_i)(V_i + V_{i+1}) = m(v_i - v_{i+1})(v_i + v_{i+1}) \tag{1.3}$$

Además, también debe conservarse la cantidad de movimiento. Puesto que antes del choque el bloque pequeño va hacia la izquierda y luego va hacia la derecha, tenemos que

$$MV_i - mv_i = MV_{i+1} + mv_{i+1}$$

Que también podemos dejar más bonito:

$$M(V_{i+1} - V_i) = -m(v_i + v_{i+1}) \tag{1.4}$$

Dividiendo (1.3) entre (1.4) tenemos

$$V_{i+1} + V_i = v_{i+1} - v_i$$

Y esto nos da una relación sencilla entre las velocidades antes y después del choque $i+1$:

$$v_i + V_i = v_{i+1} - V_{i+1}$$

Sustituyendo en (1.2) tenemos algo tan tremendo que lo voy a recuadrar para volver luego a ello:

$$\boxed{D_{i+1}(v_{i+1} - V_{i+1}) = D_i(v_i - V_i) = constante} \tag{1.5}$$

Y esto es algo fundamental: acabamos de demostrar que **el producto D(v-V) se mantiene siempre constante a lo largo de cualquier choque tras el primero**. Estoy seguro de que hay alguna manera más elegante y corta de demostrar esto, pero yo no la conozco... si a alguien se le ocurre, bienvenido sea.

Lo de "tras el primero", por cierto, es porque nuestra notación es que V_i es la velocidad *después* del choque i, con lo que la primera relación que obtenemos es entre las velocidades tras el choque 2 y las velocidades tras el choque 1.

Esto significa que, para empezar, tenemos que calcular a mano las velocidades tras el choque 1, teniendo en cuenta que el bloque pequeño tiene una masa muchísimo menor que el grande. Las buenas noticias son que hacer eso no es tan complicado; vamos con ello.

Por un lado, conservación de la energía mecánica:

$$\frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}MV_1^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 \implies MV^2 = MV_1^2 + mv_1^2 \tag{1.6}$$

Por otro, la del momento lineal:

$$MV = MV_1 + mv_1 \implies V_1 = V - \frac{m}{M}v_1 \tag{1.7}$$

Sustituyendo este valor de V_1 en (1.6),

$$MV^2 = M(V^2 + \frac{m^2}{M^2}v_1^2 - \frac{2m}{M}Vv_1) + mv_1^2$$

Pero $\frac{m^2}{M^2}$ es despreciable, con lo que nos queda

$$MV^2 = M(V^2 - \frac{2m}{M}Vv_1) + mv_1^2 \implies v_1 = 2V$$

Sustituyendo este valor en (1.7), podemos obtener el valor V_1:

$$V_1 = V - \frac{2m}{M}V = V(1 - \frac{2m}{M})$$

¡Ya tenemos los valores tras el choque 1! Por lo tanto, podemos establecer el valor de nuestra constante en (1.5), puesto que $D_1 = D$, ya que el primer choque se produce a la distancia inicial de la pared, y acabamos de hallar V_1 y v_1:

$$D_i(v_i - V_i) = D(2V - V(1 - \frac{2m}{M})) = V(1 + \frac{2m}{M}) \tag{1.8}$$

Por lo tanto, conocemos el valor del producto $D_i(v_i - V_i)$ *para todo* i. Tras el choque n, sea el que sea, en el que se para el bloque grande, conocemos la velocidad del bloque grande ($V_n = 0$), y conocemos la velocidad del pequeño, pues la calculamos al principio del todo en (1.1)... ¡podemos calcular la distancia final a la pared!

Sustituyendo en (1.8),

$$DV(1 + \frac{2m}{M})) = D_nV\sqrt{\frac{M}{m}}$$

Eliminamos la V en ambos miembros y elevamos al cuadrado para quitarnos de enmedio la raíz:

$$D^2(1 + \frac{2m^2}{M^2} + \frac{4m}{M}) = D_n^2\frac{M}{m}$$

Pero, una vez más, $\frac{m^2}{M^2}$ es despreciable, luego

$$D^2(1+\frac{4m}{M}) = D_n^2\frac{M}{m} \implies D^2\frac{M+4m}{M} = D_n^2\frac{M}{m}$$

Por lo tanto,

$$D_n^2 = D^2\frac{m(M+4m)}{M^2} = D^2\frac{Mm+4m^2}{M^2}$$

Pero despreciamos $\frac{m^2}{M^2}$ una vez más, con lo que nos queda

$$D_n^2 = D^2\frac{m}{M}$$

Y tenemos, ¡por fin!, la distancia final a la pared, que es lo que pedía el desafío:

$$\boxed{D_n \approx D\sqrt{\frac{m}{M}}}$$