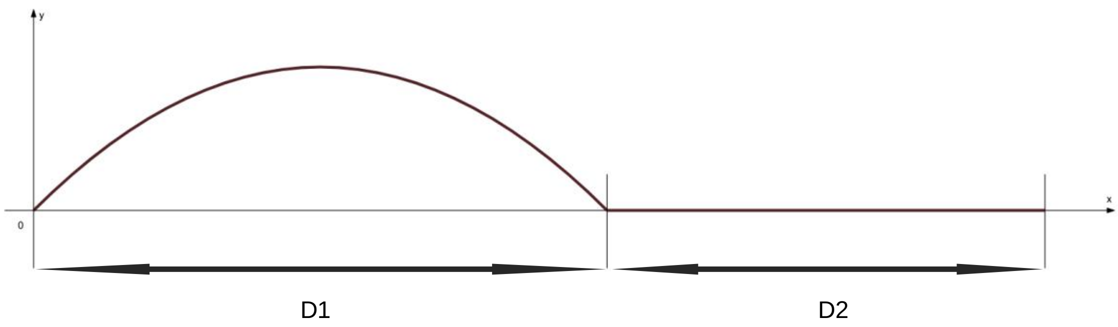
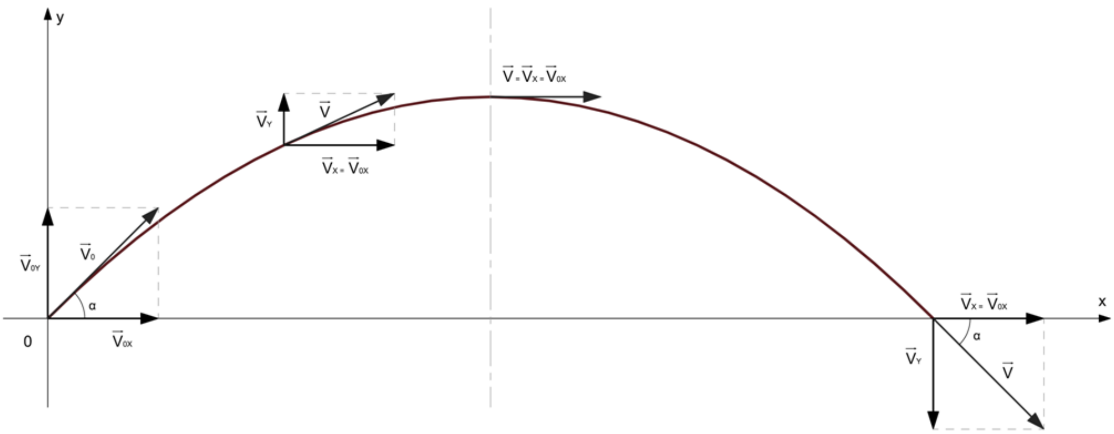
El movimiento del ladrillo se puede descomponer en 2 tipos de movimientos:

- Un movimiento parabólico cuando el ladrillo está en el aire
- Un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado cuando el ladrillo se desliza por el hielo



1) MOVIMIENTO PARABÓLICO

Al lanzar el ladrillo con una velocidad inicial ($\overrightarrow{v_0}$), éste describe la trayectoria de una parábola. Este movimiento resulta de la suma de un movimiento rectilíneo uniforme –en el que la trayectoria es una recta y la velocidad es constante en módulo y dirección-, y otro uniformemente acelerado, en el que la trayectoria es también una recta y la aceleración debida a la gravedad es constante.



El ladrillo, cuando está libre en el aire, queda únicamente sometido a la aceleración de la gravedad: $g = -gj$. Suponiendo que la distancia y la altura de lanzamiento no son muy grandes, la aceleración de la gravedad se puede considerar con dirección y módulo constantes de tal manera que, sobre el eje vertical, el movimiento es rectilíneo uniformemente acelerado con velocidad inicial v_{0y}, mientras que, en el eje horizontal el movimiento es uniforme con velocidad v_{0x}.

Por tanto, las ecuaciones del movimiento serían:

$V_x \ = V_{0x} = V_0 \cos\alpha = Constante$
$x = V_{ox} \cdot t = V_0 \cos\alpha \cdot t$
$V_y = V_{oy} - g \cdot t = V_0 \sin\alpha - g \cdot t$

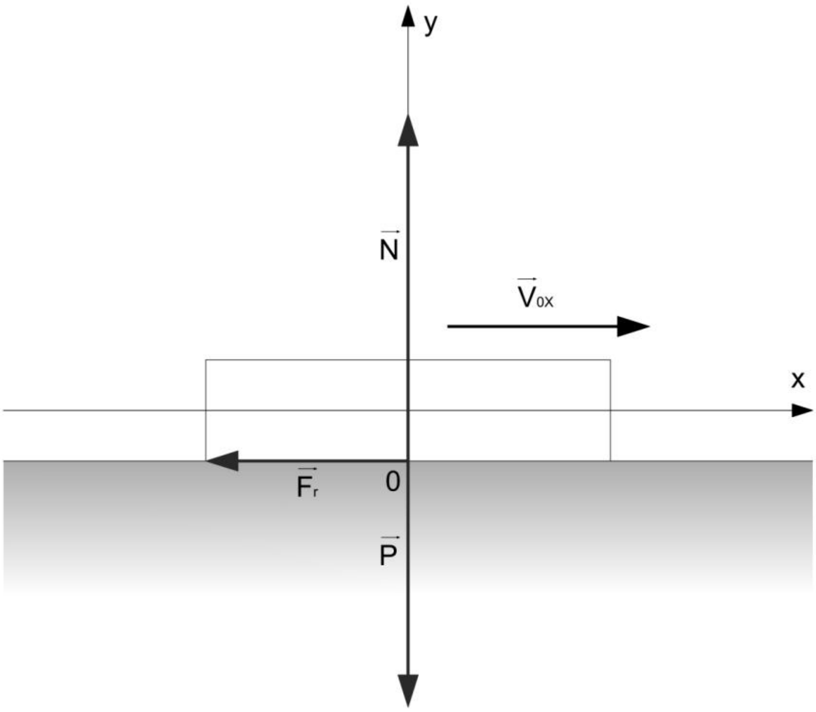
$y = V_{oy} \cdot t - {}^{1}\!/_{2} \cdot g \cdot t^2 = V_0 \sin\alpha \cdot t - {}^{1}\!/_{2} \cdot g \cdot t^2$

En el momento en el que el ladrillo toca el suelo $y = 0$, por tanto:

$${}^{1}\!/_{2} \cdot g \cdot t^2 = V_0 \sin\alpha \cdot t$$
$$t = \frac{2 \cdot \mathrm{V}_0 \sin\alpha}{g}$$
$$D1 = V_0 \cos\alpha \frac{2 \cdot \mathrm{V}_0 \sin\alpha}{g} = {V_0}^2 \frac{\sin 2\alpha}{g}$$

2) MOVIMIENTO UNIFORMEMENTE ACELERADO (deslizamiento por el hielo)

Cuando el ladrillo cae al hielo y comienza a deslizarse, surge una fuerza que se opone al deslizamiento debida a la fricción del ladrillo con el hielo. Esta fuerza de rozamiento genera en el ladrillo una aceleración constante, con la misma dirección y sentido contrario que la velocidad.



Las ecuaciones del movimiento serían:

$$F_T(x) = -F_r = -\mu \cdot N$$
$$F_T(y) = N - P = N - m \cdot g$$

Aplicando el segundo principio de la dinámica:

$$-\mu \cdot N = m \cdot a$$
$$N - m \cdot g = 0 \rightarrow N = m \cdot g$$

$$-\mu \cdot m \cdot g = m \cdot a \rightarrow a = -\mu \cdot g$$

El tiempo que tarda en detenerse $(v = 0)$ sería:

$$t = \frac{V - V_{0x}}{a} = \frac{V - V_{0x}}{-\mu \cdot g} = \frac{V_0 \cos\alpha}{\mu \cdot g}$$

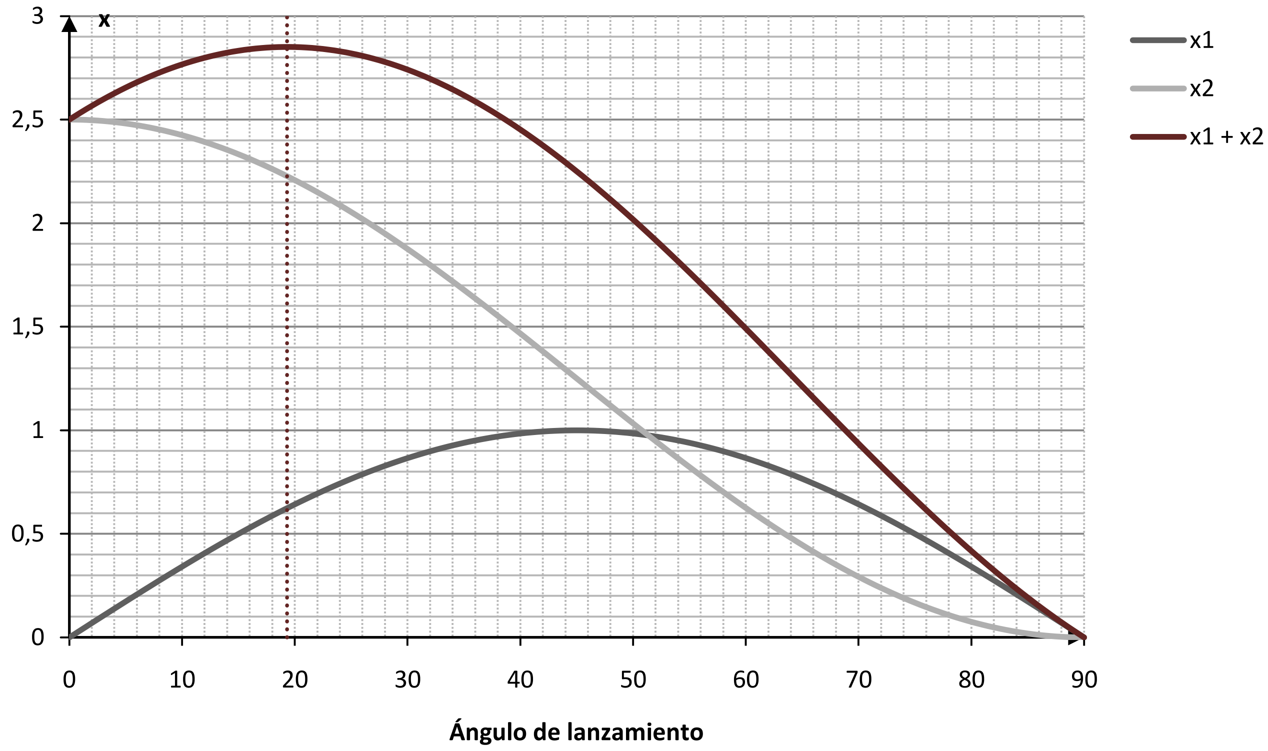
Hallamos la distancia total recorrida por el ladrillo en el hielo:

$$D2 = V_0 \cdot t + {}^1\!/_2 \cdot a \cdot t^2 = V_0 \cos\alpha \cdot \frac{V_0 \cos\alpha}{\mu \cdot g} + {}^1\!/_2\,(-\mu \cdot g)\left(\frac{V_0 \cos\alpha}{\mu \cdot g}\right)^2 = \frac{{V_0}^2 cos^2\alpha}{\mu \cdot g} - {}^1\!/_2\frac{{V_0}^2 cos^2\alpha}{\mu \cdot g}$$
$$= {}^1\!/_2\frac{{V_0}^2 cos^2\alpha}{\mu \cdot g}$$

<u>3) SUMA DE LOS 2 MOVIMIENTOS</u>

La distancia total recorrida por el ladrillo va a ser la suma de la distancia recorrida en el aire y la recorrida por el hielo. Vendrá determinada en función del ángulo de lanzamiento y el módulo de la velocidad inicial:

$$D_{TOTAL} = D1 + D2 = {V_0}^2\frac{\sin 2\alpha}{g} + {}^1\!/_2\frac{{V_0}^2 cos^2\alpha}{\mu \cdot g} = \frac{{V_0}^2}{g}\left[\underbrace{\sin 2\alpha}_{x_1} + \underbrace{\frac{cos^2\alpha}{2\mu}}_{x_2}\right]$$



Como la derivada de una función es la pendiente de la tangente en cada punto, para hallar el ángulo óptimo de lanzamiento derivamos la ecuación anterior y la igualamos a cero, obteniendo así el punto en el que la tangente se hace cero y por tanto el punto donde el ángulo de lanzamiento es el óptimo.

$$D_T{}' = \frac{{V_0}^2}{g}\left[2\cos 2\alpha + \frac{1}{2\mu} \cdot 2\cos\alpha\,(-\sin\alpha)\right] = \frac{{V_0}^2}{g}\left[2\cos 2\alpha - \frac{1}{\mu} \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha\right] = 0$$

$$2\cos 2\alpha = \frac{1}{\mu} \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha$$

$2\cos 2\alpha = \frac{1}{2\mu} \cdot \sin 2\alpha$
$4\mu = \tan 2\alpha$
$2\alpha = 38'6598° \rightarrow \boldsymbol{\alpha = 19'3299°}$ **<u>ángulo óptimo de lanzamiento</u>**

Al final los forzudos con una velocidad de lanzamiento V_0 y un ángulo de $45°$, logran lanzar el ladrillo a una distancia de:

$$D_{forzudos} = \frac{{V_0}^2}{g}\left[\sin 90 + \frac{cos^2 45}{2 \cdot 0{,}2}\right] = \frac{{V_0}^2}{g} \cdot 2{,}25$$

Laurika, con una velocidad inicial de lanzamiento de $0{,}9\ V_0$, lanza el ladrillo a la distancia de:

$$D_{Laurika} = \frac{0{,}9\ {V_0}^2}{g}\left[\sin 38{,}6598 + \frac{cos^2\ 19{,}3299}{2 \cdot 0{,}2}\right] = \frac{0{,}9\ {V_0}^2}{g} \cdot 2{,}8508 = \frac{{V_0}^2}{g} \cdot 2{,}5657$$

A pesar de que Laurika solo puede imprimir al ladrillo el 90% de la velocidad inicial de los forzudos, consigue recorrer un 14% más de distancia.