DESAFÍO: EL HOMBRE MÁS FUERTE DE MILDIVIA

[05.02.2011 EL TAMIZ]

Tal y como recomienda el Consejo de Ancianos de Mildivia, el problema se simplifica en gran medida, si se divide. Cuenta la leyenda que en los orígenes de la república, un gran sabio resolvió un complejo problema dividiéndolo en mil problemas difíciles, y dando mil soluciones sencillas. Desde entonces, se comentaba la ventaja de dividir por mil, y de ahí el nombre original Mildivido, que se transformó con el paso del tiempo en el actual Mildivia.

En este caso tenemos un primer estado mientras el ladrillo vuela por el aire (estado A), y otro estado posterior cuando desliza por el hielo (H). Vamos a estudiar ambos estados sucesivamente.

ESTADO A (AIRE)

Las condiciones iniciales del estado A son una **velocidad inicial V** de lanzamiento del ladrillo con un **ángulo α**, respecto a la horizontal. En esta situación, el ladrillo describe una curva (parábola) en su trayectoria por el aire, basada en la composición de dos movimientos perpendiculares entre sí.

En dirección vertical experimenta un movimiento gravitatorio (uniformemente acelerado), de forma que su velocidad vertical inicial (**componente vertical del vector velocidad inicial V_{y0}**) se ve reducida progresivamente por el efecto de la atracción gravitatoria (aceleración de la gravedad g). Esto lleva al ladrillo a ascender por el efecto de la velocidad vertical inicial, pero al frenar la gravedad el ascenso del ladrillo, éste llega a un punto de máxima altura, y comienza a descender cada vez con mayor velocidad hasta que vuelve a la horizontal.

$$V_{y0} = V \cdot \sin(\alpha)$$

En dirección horizontal, de forma completamente simultanea (gracias a la famosa capacidad multitarea de los ladrillos mildivianos), en ausencia de rozamiento con el aire, el ladrillo describe un movimiento uniforme de velocidad constante (**V_{x0}**), ya que la gravedad es perpendicular (no afecta a la componente horizontal del movimiento) y no hay ninguna fuerza que actúe en dirección horizontal y que pueda cambiar el estado de movimiento uniforme del ladrillo.

$$V_{x0} = V \cdot \cos(\alpha)$$

Así pues, si pudiésemos saber cuánto tiempo tarda el ladrillo en ascender y descender hasta la horizontal en su componente vertical de la trayectoria, podríamos saber cuánto recorre en horizontal **S_{xa}** con su velocidad constante. Para ello basta con aplicar la relación diferencial entre la aceleración (constante hacia abajo, es decir negativa), la velocidad y el desplazamiento:

$$a_y = -g$$

$$\mathrm{V_y}(t) = \int_0^{\mathrm{t}} -g \cdot \mathrm{dt} + \mathrm{V_{y0}} = -\mathrm{g} \cdot \mathrm{t} + \mathrm{V_{y0}}$$

$$\mathrm{S_y}(t) = \int_0^t V_y(t) \cdot dt + S_{y0} = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + V_{y0} \cdot t + S_{y0}$$

Como se supone que el punto de lanzamiento se encuentra a la misma altura que la superficie del hielo, y hemos tomado dicha superficie como nivel de referencia nulo, se deduce que S_{y0}=0. Así queda la expresión del desplazamiento vertical a lo largo de la trayectoria:

$$\mathrm{S_y}(t) = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + V_{y0} \cdot t$$

Saber cuánto tiempo **T_a** pasa hasta que el ladrillo cae contra la superficie del hielo, equivale a buscar la solución no trivial (el instante inicial, obviamente) en la que la anterior ecuación se anula:

$$\mathrm{S_y}(t) = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + V_{y0} \cdot t = 0$$

$$t_1 = 0 \qquad\qquad t_2 = \frac{2 \cdot V_{y0}}{g}$$

$$\boxed{T_a = \frac{2 \cdot V \cdot \sin(\alpha)}{g}}$$

Durante todo este tiempo, el ladrillo se ha desplazado horizontalmente según un movimiento uniforme (velocidad constante, es decir, que no depende de t, al no haber fuerza ninguna de rozamiento). De nuevo, la relación diferencial entre las magnitudes que describen el movimiento nos aclara la cuestión:

$$a_x = 0$$

$$\mathrm{V_x}(t) = \int_0^{\mathrm{t}} 0 \cdot \mathrm{dt} + \mathrm{V_{x0}} = \mathrm{V_{x0}}$$

$$\mathrm{S_x}(t) = \int_0^t V_x(t) \cdot dt + S_{x0} = V_{x0} \cdot t + S_{x0}$$

Igual que hemos supuesto la superficie de hielo como origen de coordenadas verticales, adoptamos el borde del lago, desde el que lanzan el ladrillo los competidores, como origen de coordenadas horizontales, de modo que en el instante inicial (t=0), el recorrido horizontal que ha realizado el ladrillo es nulo, es decir, S_{x0}=0. Así queda:

$$\mathrm{S_x}(T_a) = V_{x0} \cdot T_a = V \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{2 \cdot V \cdot \sin(\alpha)}{g}$$

$$\boxed{\mathrm{S_{xa}} = \frac{2 \cdot V^2 \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha)}{g}}$$

Este es el resultado que el anciano Shivillikas seguro conocía. Si queremos maximizar esta distancia, asumiendo una velocidad inicial V y una aceleración de la gravedad g, concretas, tenemos que adoptar el ángulo α, como variable, de forma que derivando la anterior expresión con respecto a dicha variable e igualándola a cero, obtener el ángulo para el que esa distancia es máxima.

$$\frac{\mathrm{dS_{xa}}}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{2 \cdot V^2}{g} \cdot \left[2 \cdot \cos^2(\alpha) - 1\right] = 0$$

$$2 \cdot \cos^2(\alpha) - 1 = 0$$

$$\cos(\alpha) = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{\alpha = \frac{\pi}{4} = 45^{\mathrm{o}}}$$

Sin duda, el anciano Shivillikas era un gran sabio. Pero en nuestro caso, entra en juego ahora el segundo estado, por lo que la solución del ángulo α que maximiza la distancia recorrida horizontalmente por el aire, puede que no sea la que maximice la distancia recorrida en total, es decir, la anterior más la recorrida deslizando por el hielo.

ESTADO H (HIELO)

En primer lugar, vamos a asumir una serie de hipótesis simplificativas bastante razonables. El ladrillo no rebota al chocar con el hielo, tampoco se rompe, ni atraviesa el hielo. De hecho, no hace la menor muesca en el hielo, por lo que nada más caer empieza a deslizar sobre el hielo.

Lamentablemente el hielo mildiviano no es tan puro como el aire mildiviano, por lo que sí opone resistencia (**coeficiente de rozamiento μ**) al libre movimiento del ladrillo. El origen de semejante comportamiento extraño del hielo no están claras: unos dicen que la culpa fue del Dios Zapa, que, en su irresponsable optimismo, no previó las nefastas consecuencias para las pérdidas energéticas, de dotar a la materia de una agradable y cómoda rugosidad superficial. Otros dicen que la culpa del Dios Azna, que con su insoportable necesidad por controlar el universo entero, decidió poner freno a la libre y loca circulación sin freno de todos los cuerpos. Sea cual sea el origen, el mundo entró en crisis, y ya nada fue lo mismo. Según dicen algunos, no sin cierto deje irónico en su voz, el rozamiento invadió el mercado, pero, a modo de ejemplo para todos en relación a la crisis generada, no tuvieron más opción que pasar del aire.

Bajo estas suposiciones, podemos aceptar que en el estado H sólo se produce movimiento horizontal (deslizamiento sobre la superficie del lago), y que se tratará de un movimiento uniformemente acelerado (**aceleración constante** debida al **rozamiento a_r**) debido a que el ladrillo se verá frenado en todo momento por una **fuerza constante de rozamiento F_r**. El ladrillo empezará su movimiento en el estado H, con una velocidad horizontal igual a la velocidad horizontal final del estado A, que es la misma que la componente horizontal de la velocidad inicial, es decir, la original V_{xo}.

Para comprender cómo actúa la fuerza de rozamiento, debemos acudir a la segunda Ley de Newton, según la cual un cuerpo experimenta una aceleración proporcional a la fuerza que sobre él actúa e inversamente proporcional a su masa. Además, la fuerza de rozamiento es proporcional al **peso P** (masa por aceleración de la gravedad) y al coeficiente de rozamiento μ:

$$F = m \cdot a \qquad\qquad F_r = \mu \cdot P = \mu \cdot m \cdot g$$

$$a_r = \frac{\mu \cdot m \cdot g}{m} = \mu \cdot g$$

Así pues, el rozamiento con el hielo actúa con el ladrillo en cierta manera como la atracción gravitatoria, pero en dirección horizontal, y con un valor reducido de la aceleración por el coeficiente de rozamiento (menor de la unidad, en concreto 0.2 según las mediciones de Laurika). Conviene advertir que, en el problema que nos ocupa, la aceleración de la gravedad actúa en dirección vertical siempre hacia abajo y la aceleración de frenado a_r debida al rozamiento actúa en dirección horizontal y sentido opuesto al movimiento que lleve el ladrillo al deslizar sobre el hielo. Suponiendo un lanzamiento hacia la derecha (positivo), el rozamiento actúa en sentido opuesto, por lo que realmente es de valor negativo (izquierda). Todo esto sin que se deba deducir ninguna preferencia por ninguno de los dioses Zapa y Azna antes mencionados.

De igual forma a lo estudiado en el movimiento vertical del estado A, aceptando que la velocidad inicial en el estado H es V_{x0}, y que el desplazamiento inicial es el recorrido horizontalmente en el estado A (S_{xa}):

$$a_r = -\mu \cdot g$$

$$\mathrm{V_x}(t) = \int_0^{\mathrm{t}} -\mu \cdot g \cdot \mathrm{dt} + \mathrm{V_{x0}} = -\mu \cdot \mathrm{g} \cdot \mathrm{t} + \mathrm{V_{x0}}$$

$$\mathrm{S_x}(t) = \int_0^{t} V_x(t) \cdot dt + S_{xa} = -\frac{\mu \cdot g}{2} \cdot t^2 + V_{x0} \cdot t + S_{xa}$$

En este caso, lo que queremos saber es cuánto tiempo pasa desde que el ladrillo cae al hielo hasta que se para el ladrillo, pues es en ese momento en el que se debe medir la distancia total recorrida. Así pues, la solución será buscar cuándo la velocidad se anula:

$$\mathrm{V_x}(t) = -\mu \cdot \mathrm{g} \cdot \mathrm{t} + \mathrm{V_{x0}} = -\mu \cdot \mathrm{g} \cdot \mathrm{t} + \mathrm{V} \cdot \cos(\alpha) = 0$$

$$\boxed{T_h = \frac{\mathrm{V} \cdot \cos(\alpha)}{\mu \cdot \mathrm{g}}}$$

Cuando ha pasado el **tiempo de deslizamiento sobre el hielo T_h**, el ladrillo ha recorrido una distancia total S_{total} igual a (sustituyendo ya todas las expresiones calculadas):

$$\mathrm{S_{total}} = \mathrm{S_x}(T_h) = -\frac{\mu \cdot g}{2} \cdot \left(\frac{V \cdot \cos(\alpha)}{\mu \cdot g} \right)^2 + V \cdot \cos(\alpha) \cdot \left(\frac{V \cdot \cos(\alpha)}{\mu \cdot g} \right) + \frac{2 \cdot V^2 \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha)}{g}$$

$$\mathrm{S_{total}} = \frac{2 \cdot V^2 \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha)}{g} + \frac{V^2 \cdot \cos^2(\alpha)}{2 \cdot \mu \cdot g}$$

El primer sumando corresponde a la distancia recorrida por el aire, y el segundo a la distancia recorrida deslizando por el hielo.

Y ahora llegamos al paso final. Se trata de conseguir maximizar esa distancia total, tomando como única variable el ángulo de lanzamiento α, es decir, suponiendo que la velocidad inicial V, el coeficiente de rozamiento μ y la aceleración de la gravedad son datos fijos del problema. Obviamente, para calcular el máximo de la función, la derivamos respecto del ángulo α, y la igualamos a cero:

$$\frac{\mathrm{dS_{total}}}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{4 \cdot V^2 \cdot \cos^2(\alpha)}{g} - \frac{V^2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)}{\mu \cdot g} - \frac{2 \cdot V^2}{g} = 0$$

Como se puede apreciar, en la anterior expresión se puede sacar factor común al cociente entre el cuadrado de la velocidad inicial y la aceleración de la gravedad, por lo que esos dos parámetros no influirán en el valor del ángulo α que maximice la distancia total. Así:

$$4 \cdot \mu \cdot \cos^2(\alpha) - \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) - 2 \cdot \mu = 0$$

En nuestro caso, con un coeficiente μ = 0.2:

$$\boxed{\frac{4 \cdot \cos^2(\alpha)}{5} - \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) - \frac{2}{5} = 0}$$

Sin embargo, el coeficiente de rozamiento sí influye en la solución, por lo que se comprende la necesidad de que Laurika lo midiese con precisión antes de la competición. Encontrar las raíces de esta ecuación no es tarea sencilla, ya que ni siquiera el conocimiento matemático del anciano Shivillikas alcanza a empresa semejante. Laurika, que además de las matemáticas conocía la sabiduría del oráculo de Excelsis, no dudó en ponerse en sus manos. El oráculo sólo contestaba a sus fieles, si éstos aceptaban entrar en sus celdas, así que Laurika tuvo que hacer el sacrificio correspondiente, y se dejó impregnar por el aura mística que rodeaba al templo de columnas (y filas) del oráculo de Excelsis. Después de pasar un tiempo prisionera en sus celdas, consiguió la respuesta. Las crónicas han conservado un pequeño trozo del pergamino en el que el oráculo escribió la solución.

Aquí se transcribe dicho fragmento:

Angulo α	dStotal/dα	Stotal [$\cdot V^2/g$]
19,310	0,000445	2,850781
19,320	0,000221	2,850781
19,330	**-0,000002**	**2,850781**
19,340	-0,000226	2,850781
19,350	-0,000449	2,850781

Buscando otras fuentes que confirmasen al oráculo, acudió al santuario de Rive, donde le pudieron mejorar la precisión de la solución óptima, en concreto 19.3299019607°. De esta forma pudo enfocar su entrenamiento hacia el ángulo adecuado, bastante menor al propuesto por el anciano Shivillikas de 45°.

Ahora bien, nos queda por demostrar que con una potencia de lanzamiento del 90% respecto del resto de atletas que lanzaron a 45 grados, su distancia total es superior. Si asumimos que la velocidad de lanzamiento es proporcional a la potencia, tendremos una velocidad de lanzamiento de Laurika V_L igual al 90% de la velocidad de lanzamiento V_A del resto de atletas:

$$V_L = 0.9 \cdot V_A$$

$$\boxed{\alpha_L = 19.3299019607^{o}} \qquad \alpha_A = 45^{o}$$

$$\mathrm{S_{total}} = \frac{V^2}{g} \cdot \left[2 \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha) + \frac{\cos^2(\alpha)}{2 \cdot \mu} \right]$$

Hemos demostrado que la distancia total S_{total} es proporcional al cuadrado de la velocidad inicial, por lo que la distancia de Laurika presenta un hándicap de partida, ya que al ser su velocidad de lanzamiento un 90% de la de los atletas, la distancia que podrá alcanzar será un 81% de la de los atletas.

Veamos qué se obtiene en cada caso:

$$\boxed{\mathrm{S_{total,L}} = \frac{V_L^2}{g} \cdot \left[2 \cdot \cos(\alpha_L) \cdot \sin(\alpha_L) + \frac{\cos^2(\alpha_L)}{2 \cdot \mu} \right] = 2.30913242009 \cdot \frac{V_A^2}{g}}$$

$$\mathrm{S_{total,A}} = \frac{V_A^2}{g} \cdot \left[2 \cdot \cos(\alpha_A) \cdot \sin(\alpha_A) + \frac{\cos^2(\alpha_A)}{2 \cdot \mu} \right] = \frac{9 \cdot V_A^2}{4 \cdot g} = 2.25 \cdot \frac{V_A^2}{g}$$

Se demuestra que a pesar de su menor potencia de lanzamiento, su mayor inteligencia le permite una mayor distancia final.

Y con esto, damos por concluida esta aventura. He disfrutado enormemente. Gracias!

Valencia, a 10 de febrero de 2011

David Gallardo Llopis