EL TAMIZ – DUELO AL SOL – TERCERA PREGUNTA

Continuamos con la tercera pregunta: qué valores de p_y y p_z harían que Z no errase su disparo a propósito en la primera ronda, cuando están las tres pretendientes vivas.

Sabiendo que teníamos una pregunta adicional, habíamos elaborado nuestra solución de manera bastante general. Rellenemos la tabla que nos muestra la probabilidad de ganar un duelo por parejas en función de la probabilidad de acierto de cada contendiente (con $p_x = 1$ fijo). Operando un poco los resultados del apartado anterior es fácil llegar a la siguiente tabla:

Situación	Gana X	Gana Y	Gana Z
XY	1	0	0
XZ	1	0	0
YX	$1-p_y$	p_y	0
YZ	0	$\frac{p_y}{1-(1-p_y)(1-p_z)}$	$\frac{p_z(1-p_y)}{1-(1-p_y)(1-p_z)}$
ZX	$1-p_z$	0	p_z
ZY	0	$\frac{p_y(1-p_z)}{1-(1-p_z)(1-p_y)}$	$\frac{p_z}{1-(1-p_z)(1-p_y)}$

Igual que antes, <u>si Z escupe lo hará siempre hacia X</u> (ya que si Z matase a Y, después X mataría a Z seguro). Así, Z elegirá escupir cuando su probabilidad de victoria contra Y en el caso YZ $\left(\frac{p_z(1-p_y)}{1-(1-p_y)(1-p_z)}\right)$ sea mayor que la probabilidad de victoria si no escupe y muere uno de X o Y (caso ZX ó ZY).

Y aquí está la mayor dificultad. Cuando hay tres contendientes, si Z no dispara, no es seguro contra quién se enfrentará, ya que esto depende del orden de disparo. Y precisamente cuál sea el contendiente puede modificar la decisión de escupir a X o escupir al suelo. Cuando está disparando Z hay dos opciones:

a. <u>Situación ZXY</u>: Después de Z le toca a X, que con seguridad matará a Y. Entonces se llega a la situación ZX, con probabilidad de victoria de Z igual a p_z.
b. <u>Situación ZYX</u>: Después de Z le toca a Y, que puede matar a X con probabilidad p_y (y entonces se llega a ZY, con probabilidad de que gane Z igual a $\frac{p_z}{1-(1-p_z)(1-p_y)}$) o fallar, y se llega nuevamente a ZX con probabilidad de victoria de Z igual a p_z.

Estudiaremos cada caso por separado.

1. PRIMERA OPCIÓN: SITUACIÓN ZXY

En este caso, si Z escupiese a X intentaría llegar al caso YZ, y si no escupiese llegaría al caso ZX. Z se decidiría por escupir cuando la probabilidad de ganar en el primer caso YZ supere a la del segundo, ZX, es decir:

$$p_{z|YZ} \geq p_{z|ZX};$$

$$\frac{p_z(1-p_y)}{1-(1-p_y)(1-p_z)} \geq p_z;$$

Operando llegamos a la relación que determina cuándo Z elige escupir en su turno:

$$1 - p_y \geq 1 - (1 - p_y)(1 - p_z);$$

$$1 - p_y \geq p_y + p_z - p_y p_z;$$

$$1 - 2p_y \geq p_z(1 - p_y);$$

$$\boldsymbol{p_z \leq \frac{1 - 2p_y}{1 - p_y}}\ ; [\mathbf{1}]$$

La desigualdad [1] nos da un límite para p_z relativo a la probabilidad de acierto de Y, p_y. Además, simultáneamente debe cumplirse la otra inecuación:

$$p_z < p_y;$$

¿Cuál de las dos condiciones es más restrictiva? El primer límite es decreciente y llega a 0 para $p_z = \frac{1}{2}$, mientras que el segundo creciente, así que tienen que cruzarse en algún punto entre 0 y 1/2. Busquemos el límite en que se cumplen ambas desigualdades:

$$p_y = \frac{1 - 2p_y}{1 - p_y};$$

$$p_y^2 - 3p_y + 1 = 0;$$

Resolviendo:

$$p_y = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2};$$

Evidentemente, como la probabilidad de acierto debe ser menor o igual que 1, la raíz que nos interesa es la que se obtiene tomando el signo negativo, es decir, los dos límites se igualan en $p_y = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0.3819$. Para valores de p_y inferiores a este límite, bastará que se cumpla $p_z < p_y$, que es siempre cierto por el enunciado. Para p_y mayor, hasta 0.5, el límite viene dado por [1]. Así, el valor máximo que podrá tomar p_z para que Z se decante por escupir en esta situación será 0.3819.

En resumen, **en la situación ZXY, Z únicamente escupirá hacia X cuando se cumpla $\boldsymbol{p_z \leq \frac{1-2p_y}{1-p_y}}$, lo que solo puede cumplirse para valores de $\boldsymbol{p_y}$ entre 0 y 0.5 (precisándose valores de $\boldsymbol{p_z}$ entre 0 y 0.3819 para que se pueda verificar esta condición, según el caso).**

2. SEGUNDA OPCIÓN: SITUACIÓN ZYX

En este caso, si Z escupiese a X intentaría llegar al caso YZ, pero si no escupiese podría llegar al caso ZY o al caso ZX, en función de que Y acertase con su escupitajo (con probabilidad p_y) o no (con probabilidad $1 - p_y$). En este caso Z decidirá escupir o no en función de la siguiente condición:

$$p_{z|YZ} \geq p_y \cdot p_{z|ZY} + (1 - p_y)p_{z|ZX};$$

Sustituyendo los valores de las probabilidades de la tabla inicial y operando podemos llegar al criterio de decisión de Z:

$$\frac{p_z(1 - p_y)}{1 - (1 - p_y)(1 - p_z)} \geq p_y \cdot \frac{p_z}{1 - (1 - p_z)(1 - p_y)} + (1 - p_y) \cdot p_z;$$

Podemos dividir entre p_z en ambos lados. Además, Como el denominador de la izquierda es siempre positivo (con las probabilidades menores que 1) podemos multiplicar en ambos lados por el mismo:

$$1 - p_y \geq p_y + (1 - p_y)\Big(1 - (1 - p_y)(1 - p_z)\Big);$$

Restamos p_y en ambos lados y dividimos entre $1 - p_y$ (positivo, no cambia el signo):

$$\frac{1 - 2p_y}{1 - p_y} \geq 1 - (1 - p_y)(1 - p_z);$$

Pasamos el 1 a la izquierda sumando y operamos:

$$\frac{1 - 2p_y}{1 - p_y} - \frac{1 - p_y}{1 - p_y} \geq -(1 - p_y)(1 - p_z);$$

Dividimos en ambos lados entre $1 - p_y$ (positivo, no cambia el signo):

$$-\frac{p_y}{(1 - p_y)^2} \geq 1 - p_z;$$

Reordenando llegamos a la siguiente condición para p_z:

$$p_z \geq 1 + \frac{p_y}{(1 - p_y)^2};$$

Como esta condición claramente no se cumple nunca, ya que debería ser $p_z > 1$, en este caso ZYX, Z nunca decidirá escupir a X; siempre le resulta más rentable que X e Y se maten el uno al otro.

3. CONCLUSIÓN

Como se ha visto, a Z solo le interesa escupir hacia X en el caso de que sea inmediatamente la siguiente; en caso contrario, es mejor que deje a Y intentar matar a X, para luego encargarse de Y.

En el caso de que X sea la siguiente en el turno, a Z solo le interesará escupir cuando se verifique $p_z \leq \frac{1-2p_y}{1-p_y}$. Además, hemos visto que esto solo puede cumplirse para valores de p_y entre 0 y 0.5, con valores máximos de p_z entre 0 y 0.3819, según corresponda.

Solución presentada por Enrique Vallejo.