EL TAMIZ – DUELO AL SOL

Interesante problema que desconocía, con dos partes claramente diferenciadas, cuya solución sin embargo debe obtenerse más o menos a la vez. Antes de empezar, un poco de notación:

1. NOTACIÓN

· Por simplicidad, llamaremos X a Xylabarr, Y a Yiggurath y Z a Zandrakhor.

· Sea $p_x = 1$ la probabilidad de Xylabarr de acertar con su escupitajo (y análogamente se definen $p_y = 0.8$ y $p_z = 0.5$)

· Sea XYZ la situación en que las tres pretendientes siguen vivas, escupe primero X, luego Y (si sigue viva), luego Z (si sigue viva), y vuelta a empezar. Igualmente, XY sería el caso en que quedan dos contendientes vivas, X e Y, y primero escupe X. El resto de posibilidades se definen análogamente. Evidentemente, tras cada disparo la situación cambia mediante una rotación (si no se acierta) o rotando y eliminado una contendiente (si se acierta).

· Sea $p_{x|XYZ}$ la probabilidad de X de ganar el duelo, condicionada a la situación actual XYZ (es decir, las tres pretendientes vivas y primero dispara X, luego Y y luego Z). Igualmente se puede definir $p_{x|XY}$, para el caso en que solo quedan dos pretendientes. Por supuesto, estas probabilidades se definen teniendo en cuenta que todas las pretendientes siguen su estrategia óptima.

2. PRIMERA PARTE: ESTRATEGIAS

Nos piden la estrategia de cada pretendiente:

a. El objetivo de su disparo en cada caso
b. Si fallará a propósito el escupitajo o no en cada caso

Comencemos nuestra solución como se comienzan estas cosas: por el final.

1. DUELO ENTRE DOS CONTENDIENTES

Supongamos que solo quedan dos contendientes (situación a la que se llegará con certeza siempre que la estrategia de alguna de las tres sea intentar matar a alguna otra). Evidentemente, en esta situación la estrategia de ambas es la misma: **Escupir a la otra, intentando matarla sin errar el tiro**, para así ganar el duelo.

Calcularemos aquí las probabilidades de victoria de los duelos individuales. Como X siempre acierta, hay un par de valores que son sencillos:

$p_{x|XY} = 1; p_{x|XZ} = 1;$

Y por tanto:

$p_{y|XY} = 0; p_{z|XZ} = 0;$

No consideramos otras combinaciones como $p_{z|XY}$, que son evidentemente 0 al encontrarse Z muerta en la situación XY.

Cuando Y o Z se enfrentan con X escupiendo primero (es decir, YX ó ZX), la única probabilidad que tienen de sobrevivir es acertar su primer (y único) disparo; de otra forma, pasarían al caso XY (ó XZ) en el que ganaría X. Es decir:

$$p_{y|YX} = p_y = 0.8 \rightarrow p_{x|YX} = 1 - p_{y|YX} = 0.2$$

$$p_{z|ZX} = p_z = 0.5 \rightarrow p_{x|ZX} = 1 - p_{z|ZX} = 0.5$$

Nos queda por calcular las probabilidades de victoria de Y y Z cuando se enfrentan entre sí. El valor concreto, aunque parece parte de lo que nos piden en la segunda pregunta, es necesario para este primer apartado: puede determinar la estrategia que seguirán ambas al principio (intentando acabar con X, acabar entre sí, o dejando actuar a alguna de las otras, en función de lo que sea más ventajoso para cada una). Está claro que, si tras escupir se falla, aún queda una posibilidad de ganar (en el caso de que nuestra contendiente falle, y después nosotros acertemos). Esto podemos plantearlo de la siguiente forma:

$$p_{z|ZY} = p_z + (1 - p_z) \cdot p_{z|YZ}$$

Y es fácil observar que $p_{z|YZ} = \left(1 - p_y\right) \cdot p_{z|ZY}$; Sustituyendo en la expresión anterior y operando:

$$p_{z|ZY} = p_z + (1 - p_z) \cdot p_{z|YZ} = p_z + (1 - p_z)\left(1 - p_y\right) \cdot p_{z|ZY};$$

$$\left(1 - (1 - p_z)\left(1 - p_y\right)\right) p_{z|ZY} = p_z;$$

$$p_{z|ZY} = \frac{p_z}{\left(1 - (1 - p_z)\left(1 - p_y\right)\right)} = \frac{0.5}{1 - 0.5 \cdot 0.2} = \frac{5}{9} \approx 0.555$$

$$\Rightarrow p_{y|ZY} = 1 - p_{z|ZY} = \frac{4}{9} \approx 0.444;$$

Por simetría obtenemos:

$$p_{y|YZ} = \frac{p_y}{\left(1 - \left(1 - p_y\right)(1 - p_z)\right)} = \frac{0.8}{1 - 0.2 \cdot 0.5} = \frac{8}{9} \approx 0.888$$

$$\Rightarrow p_{z|YZ} = 1 - p_{y|YZ} = \frac{1}{9} \approx 0.111;$$

Esto lo podemos resumir en la siguiente tabla, con la probabilidad de victoria de cada duelista en cada casilla:

Situación	Gana X	Gana Y	Gana Z
XY	1	0	0
XZ	1	0	0
YX	0.2	0.8	0
YZ	0	0.888	0.111
ZX	0.5	0	0.5
ZY	0	0.444	0.555

2. DUELO ENTRE TRES CONTENDIENTES

En este apartado estudiamos la estrategia de cada pretendiente: la selección de objetivo y si falla a propósito o no.

Selección de objetivo: Evidentemente, en caso de escupir, **Y y Z lo harán a X**. De otra forma, si se matan el uno al otro, después X matará al superviviente y ganará el duelo. Por otra parte, si X tiene que elegir entre disparar a un objetivo o al otro, **X escupirá a Y**, para quedarse en la situación ZX que le es más favorable ($p_{x|ZX} > p_{x|YX}$).

Fallo a propósito: Podemos suponer que no todas van a fallar a propósito. Ese caso lo descartamos ya que llevaría a una situación de bloqueo que no terminaría nunca, lo que no beneficia a ninguna de las tres. Como tanto Y como X tienen como objetivo a X, está claro que a X nunca le interesará fallar a propósito en su turno. De otra forma, a la larga le acabarían matando en algún momento. Por otra parte, como X disparará a Y en su turno (y le matará con certeza), Y tampoco fallará su disparo a propósito si le toca el turno antes que X.

Nos queda estudiar qué hace Z. Aquí utilizaremos las probabilidades de victoria de cada duelo individual calculadas en la sección 2.1. Si Z en su turno dispara a X y le mata, pasaría a la situación YZ, con $p_{z|YZ} = 0.111$. En cambio, fallase a propósito, alguno de las otras dos se matarán entre sí y volvería a escupir Z. En esos dos casos tendríamos $p_{z|ZX} = 0.5$ ó $p_{z|ZY} = 0.555$, ambos superiores a $p_{z|YZ}$. Por tanto, la estrategia de Z será fallar su disparo a propósito.

En resumen, **X e Y se intentarán matar entre sí para forzar un duelo con la pretendiente más débil, mientras Z espera a que se maten una a la otra para ser la primera en escupir después**.

3. SEGUNDA PARTE: PROBABILIDAD DE VICTORIA

En este apartado tenemos que calcular las probabilidades de victoria de cada una de las tres contendientes para cada una de las seis posibles situaciones iniciales (en función del orden de disparo). Sin embargo, como X e Y se van a disparar entre sí, y Z va a ser una "simple observadora", el cálculo se simplifica mucho, ya que solo hay dos posibilidades, ambas equiprobables:

a. X comienza disparando antes que Y (casos XYZ, XZY, ZXY). Entonces X mata a Y y se llega a la situación ZX. En este caso hemos visto que ambas tienen la misma probabilidad de sobrevivir (0.5).
b. Y comienza disparando antes que X (casos YZX, YXZ, ZYX). Entonces Y puede matar a X (con probabilidad 0.8) o fallar (con probabilidad 0.2) y que X mate a Y con total certeza. En el primera caso llegamos a ZY, con $p_{z|ZY} = \frac{5}{9}$ y $p_{y|ZY} = \frac{4}{9}$. En el segundo caso, volvemos a la misma situación que el caso a) (ganan X ó Z con igual probabilidad).

Resumiendo, con las estrategias declaradas, ¿cuál será la probabilidad de ganar de cada una?

- X gana si dispara primero (probabilidad 0.5) y Z falla (probabilidad 0.5); o si dispara después de Y (probabilidad 0.5), Y falla (probabilidad 0.2) y gana a Z (probabilidad 0.5). Es decir:
$$\boldsymbol{p_{gana-X}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}} = 0.3;$$
- Y solo gana si dispara antes que X (probabilidad 0.5) y gana a X y a Z (probabilidad 0.8 y 4/9 respectivamente), es decir:
$$\boldsymbol{p_{gana-Y}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{9} = \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{45}} \approx 0.1777;$$

- Z gana en cualquier otro caso: Si comienza X matando a Y (prob. 0.5) y gana el duelo con X (prob. 0.5); si comienza Y (prob. 0.5), no mata a X (prob. 0.2) y gana el duelo con X (prob. 0.5); o bien si comienza Y (prob. 0.5) matando a X (prob. 0.8) y Z gana a Y (prob. 5/9). Es decir:
$$\boldsymbol{p_{gana-Z}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{9}\right)=\boldsymbol{\frac{47}{90}}\approx 0.5222;$$

Finalmente, se puede verificar que:
$$p_{gana-X}+p_{gana-Y}+p_{gana-Z}=\frac{3}{10}+\frac{8}{45}+\frac{47}{90}=1.$$

Curiosamente, la pretendiente con menos puntería es la que tiene más probabilidad de ganar el duelo, ya que las otras dos se entre sí hasta que muera una, y tendrá la oportunidad de disparar la primera.

Solución a las dos primeras preguntas de Enrique Vallejo