Cristóbal Camarero Coterillo

8 de diciembre de 2010

1. Parte I

Denotaremos como $\mathtt{X}$, $\mathtt{Y}$, $\mathtt{Z}$ a que sobrevivan respectivamente *Xylabarr*, *Yiggurath*, *Zandrakhor*. Por $\mathtt{PQ}$ a que estén vivos $\mathtt{P}$ y $\mathtt{Q}$ siendo el turno de escupir de $\mathtt{P}$. Y por $\mathtt{PQR}$ a que estén todos vivos tocándole a $\mathtt{P}$ luego a $\mathtt{Q}$ y luego a $\mathtt{R}$. Denotaremos por $p\mathtt{P}+q\mathtt{Q}$ a que haya una probalidad p de $\mathtt{P}$ y q de $\mathtt{Q}$.

Las probabilidades de acertar el escupitajo de cada una eran:

Xylabarr	1
Yiggurath	$\frac{4}{5}$
Zandrakhor	$\frac{1}{2}$

Tenemos cuando quedan dos vivas:

$$\mathtt{XY} = \mathtt{XZ} = \mathtt{X}$$
$$\mathtt{YX} = \frac{4\mathtt{Y}+\mathtt{XY}}{5} = \frac{4\mathtt{Y}+\mathtt{X}}{5}$$
$$\mathtt{YZ} = \frac{4\mathtt{Y}+\mathtt{ZY}}{5}$$
$$\mathtt{ZX} = \frac{\mathtt{Z}+\mathtt{XZ}}{2} = \frac{\mathtt{Z}+\mathtt{X}}{2}$$
$$\mathtt{ZY} = \frac{\mathtt{Z}+\mathtt{YZ}}{2}$$

Resolvemos $\mathtt{YZ}$ y $\mathtt{ZY}$

$$\mathtt{YZ} = \frac{4\mathtt{Y}+\frac{\mathtt{Z}+\mathtt{YZ}}{2}}{5}$$
$$9\mathtt{YZ} = 8\mathtt{Y}+\mathtt{Z}$$

$$\mathtt{YZ} = \frac{8\mathtt{Y}+\mathtt{Z}}{9}$$
$$\mathtt{ZY} = \frac{10\mathtt{Z}+8\mathtt{Y}}{18} = \frac{5\mathtt{Z}+4\mathtt{Y}}{9}$$

Para cuando están las tres vivas el resultado depende de a quién decidan disparar, denotaremos como $\mathtt{P} \to \mathtt{Q}$ a que $\mathtt{P}$ dispare a $\mathtt{Q}$. Y como $\perp$ si decide fallar aposta. Empecemos con $\mathtt{XYZ}$.

$\mathtt{X} \to \mathtt{Y}$: $\mathtt{XYZ} = \mathtt{ZX} = \frac{\mathtt{X}+\mathtt{Z}}{2}$

$\mathtt{X} \to \mathtt{Z}$: $\mathtt{XYZ} = \mathtt{YX} = \frac{\mathtt{X}+4\mathtt{Y}}{5}$

$\mathtt{X} \to \perp$: $\mathtt{XYZ} = \mathtt{YZX}$

Para $\mathtt{XZY}$ tenemos una situación parecida:

$\mathtt{X} \to \mathtt{Y}$: $\mathtt{XZY} = \mathtt{ZX} = \frac{\mathtt{X}+\mathtt{Z}}{2}$

$\mathtt{X} \to \mathtt{Z}$: $\mathtt{XZY} = \mathtt{YX} = \frac{\mathtt{X}+4\mathtt{Y}}{5}$

$\mathtt{X} \to \perp$: $\mathtt{XZY} = \mathtt{ZYX}$

Si suponemos que $\mathtt{X}$ no va a fallar a propósito entonces es claro que su estrategia óptima es disparar a $\mathtt{Y}$, con lo que $\mathtt{XYZ} = \mathtt{XZY} = \frac{\mathtt{X}+\mathtt{Z}}{2}$.

Ahora nos fijamos en $\mathtt{YXZ}$

$\mathtt{Y} \to \mathtt{X}$: $\mathtt{YXZ} = \frac{4\mathtt{ZY}+\mathtt{XZY}}{5} = \frac{9\mathtt{X}+32\mathtt{Y}+49\mathtt{Z}}{90}$

$\mathtt{Y} \to \mathtt{Z}$: $\mathtt{YXZ} = \frac{4\mathtt{XY}+\mathtt{XZY}}{5} = \frac{9\mathtt{X}+0\mathtt{Y}+\mathtt{Z}}{10}$

$\mathtt{Y} \to \perp$: $\mathtt{YXZ} = \mathtt{XZY} = \frac{\mathtt{X}+0\mathtt{Y}+\mathtt{Z}}{2}$

Así que en está situación $\mathtt{Y}$ dispara a $\mathtt{X}$ y $\mathtt{YXZ} = \frac{9\mathtt{X}+32\mathtt{Y}+49\mathtt{Z}}{90}$.

Vamos ahora a $\mathtt{ZXY}$

$\mathtt{Z} \to \mathtt{X}$: $\mathtt{ZXY} = \frac{\mathtt{YZ}+\mathtt{XYZ}}{2} = \frac{9\mathtt{X}+16\mathtt{Y}+11\mathtt{Z}}{36}$

$\mathtt{Z} \to \mathtt{Y}$: $\mathtt{ZXY} = \frac{\mathtt{XZ}+\mathtt{XYZ}}{2} = \frac{3\mathtt{X}+\mathtt{Z}}{4}$

$\mathtt{Z} \to \perp$: $\mathtt{ZXY} = \mathtt{XYZ} = \frac{\mathtt{X}+\mathtt{Z}}{2}$

Con lo que lo mejor que puede hacer es fallar con $\mathtt{ZXY} = \frac{\mathtt{X}+\mathtt{Z}}{2}$.

Ahora la otra opción de $\mathtt{Z}$, $\mathtt{ZYX}$

$\mathtt{Z} \to \mathtt{X}$: $\mathtt{ZYX} = \frac{\mathtt{YZ}+\mathtt{YXZ}}{2} = \square + \frac{59}{180}\mathtt{Z}$

$\mathtt{Z} \to \mathtt{Y}$: $\mathtt{ZYX} = \frac{\mathtt{XZ}+\mathtt{YXZ}}{2} = \square + \frac{49}{180}\mathtt{Z}$

$\mathtt{Z} \to \perp$: $\mathtt{ZYX} = \mathtt{YXZ} = \frac{9\mathtt{X}+32\mathtt{Y}+49\mathtt{Z}}{90}$

Con lo que de nuevo dispara al aire, obteniendo $\mathtt{ZYX} = \frac{9\mathtt{X}+32\mathtt{Y}+49\mathtt{Z}}{90}$.

Por último tenemos $\mathtt{YZX}$

$\mathtt{Y} \to \mathtt{X}$: $\mathtt{YZX} = \frac{4\mathtt{ZY}+\mathtt{ZXY}}{5} = \frac{9\mathtt{X}+32\mathtt{Y}+49\mathtt{Z}}{90}$

$\mathtt{Y} \to \mathtt{Z}$: $\mathtt{YZX} = \frac{4\mathtt{XY}+\mathtt{ZXY}}{5} = \square + 0\mathtt{Y}$

$\mathtt{Y} \to \perp$: $\mathtt{YZX} = \mathtt{ZXY} = \frac{\mathtt{X}+\mathtt{Z}}{2}$

Que de nuevo sólo consigue algo disparando a X.

Habíamos supuesto que X disparaba a Y, consiguiendo un $\frac{1}{2}$ de probabilidad de ganar. Si disparase al aire obtendría sólo un décimo[1] con lo que efectivamente quiere disparar a Y.

En resumen tenemos:

$$
\begin{aligned}
\mathtt{XYZ} &= \frac{\mathtt{X}+\mathtt{Z}}{2} = \frac{45\mathtt{X}+45\mathtt{Z}}{90} \\
\mathtt{XZY} &= \frac{\mathtt{X}+\mathtt{Z}}{2} = \frac{45\mathtt{X}+45\mathtt{Z}}{90} \\
\mathtt{YXZ} &= \frac{9\mathtt{X}+32\mathtt{Y}+49\mathtt{Z}}{90} \\
\mathtt{YZX} &= \frac{9\mathtt{X}+32\mathtt{Y}+49\mathtt{Z}}{90} \\
\mathtt{ZXY} &= \frac{\mathtt{X}+\mathtt{Z}}{2} = \frac{45\mathtt{X}+45\mathtt{Z}}{90} \\
\mathtt{ZYX} &= \frac{9\mathtt{X}+32\mathtt{Y}+49\mathtt{Z}}{90}
\end{aligned}
$$

Como el orden es al azar el resultado es

$$\frac{1}{6}(\mathtt{XYZ}+\mathtt{XZY}+\mathtt{YXZ}+\mathtt{YZX}+\mathtt{ZXY}+\mathtt{ZYX}) = \frac{27\mathtt{X}+16\mathtt{Y}+47\mathtt{Z}}{90}$$

Con lo que la probabilidad de que gane Xylabarr es de $\frac{3}{10}$, la de Yiggurath de $\frac{8}{45}$ y la de Zandrakhor de $\frac{47}{90}$.

[1] Asumiendo claro, que las siguientes veces dispararía a Y

2. Parte II

En esta segunda parte nos preguntamos por las condiciones que hacen que $\mathtt{Z}$ deba escupir al suelo, para ello variamos las precisiones de $\mathtt{Y}$ y $\mathtt{Z}$ que denotaremos como $\mathcal{Y}$ y $\mathcal{Z}$. Exigiremos $\mathcal{Y} > \mathcal{Z}$ y mantendremos $\mathcal{X} = 1$. También denotaremos $\overline{\mathcal{X}}$ a $1 - \mathcal{X}$.

De forma análoga a la parte anterior tenemos:

$$\begin{aligned}
&\mathtt{XY} = \mathtt{XZ} = \mathtt{X}\\
&\qquad \mathtt{YX} = \mathcal{Y}\mathtt{Y} + \overline{\mathcal{Y}}\mathtt{XY} = \mathcal{Y}\mathtt{Y} + \overline{\mathcal{Y}}\mathtt{X}\\
&\qquad \mathtt{YZ} = \mathcal{Y}\mathtt{Y} + \overline{\mathcal{Y}}\mathtt{ZY}\\
&\qquad \mathtt{ZX} = \mathcal{Z}\mathtt{Z} + \overline{\mathcal{Z}}\mathtt{XZ} = \mathcal{Z}\mathtt{Z} + \overline{\mathcal{Z}}\mathtt{X}\\
&\qquad \mathtt{ZY} = \mathcal{Z}\mathtt{Z} + \overline{\mathcal{Z}}\mathtt{YZ}
\end{aligned}$$

Podemos resolver $\mathtt{YZ}$ y $\mathtt{ZY}$ de la misma forma que antes

$$\mathtt{YZ} = \mathcal{Y}\mathtt{Y} + \overline{\mathcal{Y}}\mathcal{Z}\mathtt{Z} + \overline{\mathcal{Y}}\,\overline{\mathcal{Z}}\mathtt{YZ}$$

$$\mathtt{YZ} = \frac{\mathcal{Y}\mathtt{Y} + \overline{\mathcal{Y}}\mathcal{Z}\mathtt{Z}}{\overline{\overline{\mathcal{Y}}\,\overline{\mathcal{Z}}}}$$

$$\begin{aligned}
\mathtt{YZ} &= \frac{\mathcal{Y}\mathtt{Y} + \overline{\mathcal{Y}}\mathcal{Z}\mathtt{Z}}{\overline{\overline{\mathcal{Y}}\,\overline{\mathcal{Z}}}}\\
\mathtt{ZY} &= \frac{\mathcal{Y}\overline{\mathcal{Z}}\mathtt{Y} + \mathcal{Z}\mathtt{Z}}{\overline{\overline{\mathcal{Y}}\,\overline{\mathcal{Z}}}}
\end{aligned}$$

Como antes, cuando estén las tres vivas $\mathtt{X}$ va a disparar a $\mathtt{Y}$, con lo que

$$\mathtt{XYZ} = \mathtt{XZY} = \mathtt{ZX} = \mathcal{Z}\mathtt{Z} + \overline{\mathcal{Z}}\mathtt{X}$$

Y en el caso $\mathtt{YXZ}$, $\mathtt{Y}$ tiene 0 posibilidades de ganar si dispara a $\mathtt{Z}$ o al suelo, así que dispara a $\mathtt{X}$

$$\mathtt{YXZ} = \mathcal{Y}\mathtt{ZY} + \overline{\mathcal{Y}}\mathtt{XZY} = \mathcal{Y}\frac{\mathcal{Y}\overline{\mathcal{Z}}\mathtt{Y} + \mathcal{Z}\mathtt{Z}}{\overline{\overline{\mathcal{Y}}\,\overline{\mathcal{Z}}}} + \overline{\mathcal{Y}}\mathcal{Z}\mathtt{Z} + \overline{\mathcal{Y}}\,\overline{\mathcal{Z}}\mathtt{X}$$

Con esto ya estamos en condiciones de ver que es lo mejor para $\mathtt{Z}$. Consideremos $\mathtt{ZXY}$

$\mathtt{Z} \to \perp$: $\mathtt{ZXY} = \mathtt{XYZ} = \mathcal{Z}\mathtt{Z} + \overline{\mathcal{Z}}\mathtt{X}$

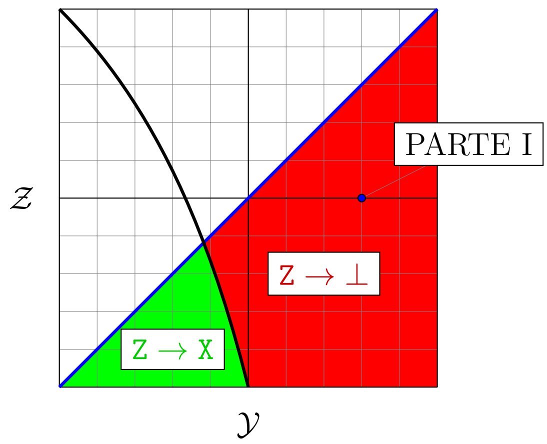

Figura 1: Decisión de $\mathtt{ZXY}$ según las probabilidades de acierto $\mathcal{Y}$ y $\mathcal{Z}$

$\mathtt{Z} \to \mathtt{X}$: $\mathtt{ZXY} = \mathcal{Z}\mathtt{YZ} + \overline{\mathcal{Z}}\mathtt{XYZ} = \mathcal{Z}\frac{\mathcal{Y}\mathtt{Y} + \overline{\mathcal{Y}}\mathcal{Z}\mathtt{Z}}{\overline{\overline{\mathcal{Y}}\,\overline{\mathcal{Z}}}} + \overline{\mathcal{Z}}\mathcal{Z}\mathtt{Z} + \overline{\mathcal{Z}}^2\mathtt{X}$

$\mathtt{Z} \to \mathtt{Y}$: $\mathtt{ZXY} = \mathcal{Z}\mathtt{XZ} + \overline{\mathcal{Z}}\mathtt{XYZ} = \mathcal{Z}\mathtt{X} + \overline{\mathcal{Z}}\mathtt{XYZ}$

Claramente $\mathtt{Z} \to \mathtt{Y}$ es siempre la peor opción. Con $\mathtt{Z} \to \perp$ tiene una probabilidad de ganar de $\mathcal{Z}$ y con $\mathtt{Z} \to \mathtt{X}$ su probabilidad es $\overline{\mathcal{Z}}\mathcal{Z} + \mathcal{Z}\frac{\overline{\mathcal{Y}}\mathcal{Z}}{\overline{\overline{\mathcal{Y}}\,\overline{\mathcal{Z}}}}$. Así que será mejor que dispare al suelo si sólo si

$$1 > \overline{\mathcal{Z}} + \frac{\overline{\mathcal{Y}}\mathcal{Z}}{\overline{\overline{\mathcal{Y}}\,\overline{\mathcal{Z}}}}$$

De ahí obtenemos que la curva de separación es

$$\mathcal{Z} = \frac{-1 + 2\mathcal{Y}}{-1 + \mathcal{Y}}$$

Podemos ver está situación gráficamente en la Figura 1.

Ahora nos fijamos en $\mathtt{ZYX}$

$\mathtt{Z} \to \perp$: $\mathtt{ZYX} = \mathtt{YXZ} = \mathcal{Y}\frac{\mathcal{Y}\overline{\mathcal{Z}}\mathtt{Y} + \mathcal{Z}\mathtt{Z}}{\overline{\overline{\mathcal{Y}}\,\overline{\mathcal{Z}}}} + \overline{\mathcal{Y}}\mathcal{Z}\mathtt{Z} + \overline{\mathcal{Y}}\,\overline{\mathcal{Z}}\mathtt{X}$

$\mathtt{Z} \to \mathtt{X}$: $\mathtt{ZYX} = \mathcal{Z}\mathtt{YZ} + \overline{\mathcal{Z}}\mathtt{YXZ} = \mathcal{Z}\frac{\mathcal{Y}\mathtt{Y} + \overline{\mathcal{Y}}\mathcal{Z}\mathtt{Z}}{\overline{\overline{\mathcal{Y}}\,\overline{\mathcal{Z}}}} + \overline{\mathcal{Z}}\left[\mathcal{Y}\frac{\mathcal{Y}\overline{\mathcal{Z}}\mathtt{Y} + \mathcal{Z}\mathtt{Z}}{\overline{\overline{\mathcal{Y}}\,\overline{\mathcal{Z}}}} + \overline{\mathcal{Y}}\mathcal{Z}\mathtt{Z} + \overline{\mathcal{Y}}\,\overline{\mathcal{Z}}\mathtt{X}\right]$

$\mathtt{Z} \to \mathtt{Y}$: $\mathtt{ZYX} = \mathcal{Z}\mathtt{XZ} + \overline{\mathcal{Z}}\mathtt{YXZ} = \mathcal{Z}\mathtt{X} + \overline{\mathcal{Z}}\mathtt{YXZ}$

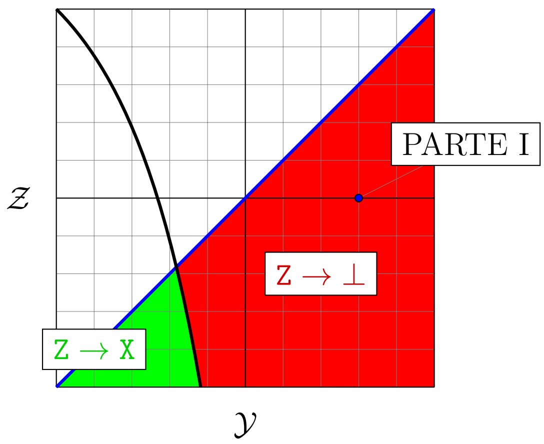

Figura 2: Decisión de $\mathtt{ZYX}$ según las probabilidades de acierto $\mathcal{Y}$ y $\mathcal{Z}$

De nuevo disparar a $\mathtt{Y}$ no tiene ningún sentido y tenemos que discriminar entre disparar a $\mathtt{X}$ o a nadie. Extrayendo los coeficientes de $\mathtt{Z}$ tenemos que debe disparar al suelo si sólo si

$$\frac{\mathcal{Y}\mathcal{Z}}{\overline{\overline{\mathcal{Y}}\,\overline{\mathcal{Z}}}} + \overline{\mathcal{Y}}\mathcal{Z} > \frac{\overline{\mathcal{Y}}\mathcal{Z}^2 + \mathcal{Y}\mathcal{Z}\overline{\mathcal{Z}}}{\overline{\overline{\mathcal{Y}}\,\overline{\mathcal{Z}}}} + \overline{\mathcal{Y}}\mathcal{Z}\overline{\mathcal{Z}}$$

que simplifica a

$$\mathcal{Y} > \overline{\mathcal{Y}}\mathcal{Z} + \mathcal{Y}\overline{\mathcal{Z}} - \overline{\overline{\mathcal{Y}}\,\overline{\mathcal{Z}}}\,\overline{\mathcal{Y}}\mathcal{Z}.$$

Dando la curva de separación

$$\mathcal{Z} = \frac{\mathcal{Y}^2 - 3\mathcal{Y} + 1}{\mathcal{Y}^2 - 2\mathcal{Y} + 1}.$$

En la Figura 2 está representada esta decisión.

Aunque Pedro sólo preguntaba por la estrategia de $\mathtt{Z}$ vamos a mirar que pasa con la estrategia de $\mathtt{Y}$ en el último caso, $\mathtt{YZX}$. Aquí tenemos un problema ya que lo que ocurre si fallamos (reduciéndose a $\mathtt{ZXY}$) es dependiente de la estrategia de $\mathtt{Z}$

$$\mathtt{ZXY} = \begin{cases} \mathcal{Z}\mathtt{Z} + \overline{\mathcal{Z}}\mathtt{X} & \mathtt{Z} \rightarrow \perp \\ \mathcal{Z}\frac{\mathcal{Y}\mathtt{Y} + \overline{\mathcal{Y}}\mathcal{Z}\mathtt{Z}}{\overline{\overline{\mathcal{Y}}\,\overline{\mathcal{Z}}}} + \overline{\mathcal{Z}}\mathcal{Z}\mathtt{Z} + \overline{\mathcal{Z}}^2\mathtt{X} & \mathtt{Z} \rightarrow \mathtt{X} \end{cases}$$

Cuando $\mathtt{Z} \rightarrow \perp$ sólo le sirve de algo disparar a $\mathtt{X}$, veamos que pasa cuando $\mathtt{Z} \rightarrow \mathtt{X}$.

$\mathtt{Y} \rightarrow \perp$: $\mathtt{YZX} = \mathtt{ZXY} = \mathcal{Z}\frac{\mathcal{Y}\mathtt{Y} + \overline{\mathcal{Y}}\mathcal{Z}\mathtt{Z}}{\overline{\overline{\mathcal{Y}}\,\overline{\mathcal{Z}}}} + \overline{\mathcal{Z}}\mathcal{Z}\mathtt{Z} + \overline{\mathcal{Z}}^2\mathtt{X}$

$\mathtt{Y} \to \mathtt{X}$: $\mathtt{YZX} = \mathcal{Y}\mathtt{ZY} + \overline{\mathcal{Y}}\mathtt{ZXY} = \mathcal{Y}\frac{\mathcal{Y}\overline{\mathcal{Z}}\mathtt{Y} + \mathcal{Z}\mathtt{Z}}{\overline{\overline{\mathcal{Y}}\,\overline{\mathcal{Z}}}} + \overline{\mathcal{Y}}\left[\mathcal{Z}\frac{\mathcal{Y}\mathtt{Y} + \overline{\mathcal{Y}}\mathcal{Z}\mathtt{Z}}{\overline{\overline{\mathcal{Y}}\,\overline{\mathcal{Z}}}} + \overline{\mathcal{Z}}\mathcal{Z}\mathtt{Z} + \overline{\mathcal{Z}}^2\mathtt{X}\right]$

Como en ocasiones anteriores recolectamos los coeficientes de `Y` para ver cuando le compensa fallar aposta

$$\frac{\mathcal{Y}\mathcal{Z}}{\overline{\overline{\mathcal{Y}}\,\overline{\mathcal{Z}}}} > \frac{\mathcal{Y}^2\overline{\mathcal{Z}} + \mathcal{Y}\overline{\mathcal{Y}}\mathcal{Z}}{\overline{\overline{\mathcal{Y}}\,\overline{\mathcal{Z}}}}$$

simplificando

$$\mathcal{Z} > \mathcal{Y}\overline{\mathcal{Z}} + \overline{\mathcal{Y}}\mathcal{Z}$$

$$\mathcal{Z} > 1/2$$

Pero para $\mathcal{Z} > 1/2$, `Z` siempre decide fallar, con lo que en todas las situaciones `Y` decide disparar a `X`.